N° d'Enregistrement
au C.N.R.S. :

THESE

présentée à

l' Université de Paris VI

pour obtenir

Le Titre de Docteur - Ingénieur

par

Pawan Kumar GUPTA

SUJET DE LA THESE :

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU MODELE DE PRANDTL POUR DES ECOULEMENTS NON-UNIFORMES
(Incidence ou vitesse variable en envergure)

Soutenue le 29 Juin 1973 devant la commission d'Examen

M. L. MALAVARD.....Président

MM. R. COMOLET..... } Examinateurs
J. J. BERNARD.....

PARIS 1973

N° d'Enregistrement
au C.N.R.S. :

THESE

présentée à

l' Université de Paris VI

pour obtenir

Le Titre de Docteur - Ingénieur

par

Pawan Kumar GUPTA

SUJET DE LA THESE :

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU MODELE DE PRANDTL POUR DES ECOULEMENTS NON-UNIFORMES
(Incidence ou vitesse variable en envergure)

Soutenue le 29 Juin 1973 devant la commission d'Examen

M. L. MALAVARD.....Président

MM. R. COMOLET.....
J. J. BERNARD..... } Examinateurs

PARIS 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Cette étude a été effectuée à la Société Nationale Industrielle Aérospatiale à Chatillon. Les essais en ont été financés par la Direction des Recherches et Moyens d'Essais.

Mes plus vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur L. MALAVARD qui a consenti à présider le jury d'examen et à Monsieur le Professeur R. COMOLET qui a bien voulu accepter d'en faire partie.

Ma gratitude s'adresse à Monsieur le Professeur J.J. BERNARD qui m'a dirigé tout le long de cette étude.

Ma grande reconnaissance va aussi à Monsieur R. HIRSCH, Ingénieur Conseil, et à Monsieur P. LAZAREFF, Chef du Département ARA à la S.N.I.A.S., dont les conseils et l'aide m'ont été très précieux.

Je dois enfin mentionner le large concours que m'a apporté tout le personnel de la S.N.I.A.S. (DEP/ARA à Chatillon et à Saint-Cyr). A chacun j'adresse ici tous mes remerciements.

TABLE DES MATIERES

		Pages
	NOTATIONS	
	Avant Propos	1
I	INTRODUCTION	2
II	AILE VRILLEE soumise à un écoulement amont uniforme.	4
II 1.	Etude expérimentale.	4
II 1.1.	Définition de la maquette étudiée.	4
II 1.2.	Disposition des prises de pression.	5
II 1.3.	Montage d'essais.	6
II 1.4.	Appareillage de mesure.	7
II 1.5.	Correction des résultats d'essais.	7
II 1.5.1	Correction de la pression dynamique.	7
II 1.5.2.	Correction d'incidence.	7
II 1.6.	Présentation des résultats.	9
II 2.	Etude théorique	9
II 2.1.	Méthode de PRANDTL	9
II 2.2.	Modification de la méthode de PRANDTL	12
II 3.	Confrontation théorie-expérience.	15
III	AILE PLATE soumise à un écoulement non-uniforme.	16
III 1.	Etude Expérimentale.	16
III 1.1.	Définition de la maquette.	17
III 1.2.	Montage d'essais.	17
III 1.3.	Equipement de la veine.	18
III 1.4.	Caractéristiques du champ de vitesse.	18
III 2.	Etude théorique.	19
III 2.1.	Méthode de PRANDTL.	21

.../...

III. 2. 2. Méthode de PRANDTL modifiée. 22

III. 2. 3. Correction de parois. 23

III. 2. 4. Application de la théorie de la ligne portante selon KARMAN et TSIEN. 24

III. 2. 5. Correction de la couche limite. 26

III. 3. Méthode de HONDA. 27

III. 4. Confrontation théorie-expérience. 27

ANNEXES

Annexe 1
Correction de parois pour une aile vrillée expérimentée dans une veine rectangulaire semi-guidée. 29

Annexe 2
Introduction de la composante de vitesse transverse dans le problème de l'aile d'envergure finie de PRANDTL. 31

Annexe 3
Obtention d'un champ de vitesse linéaire dans une soufflerie. 34

Annexe 4
La théorie de la ligne portante pour une aile en écoulement non-uniforme (KARMAN - TSIEN). 45

Annexe 5
Listing de programme de calcul. 53

Annexe 6
Méthode de HONDA. 59

Références. 65

NOTATIONS PRINCIPALES

b	Envergure de l'aile
l	Corde de l'aile
λ	Allongement
S	Surface de l'aile
B	Largeur de la veine rectangulaire
H	Hauteur de la veine rectangulaire
R	Rayon de la veine circulaire
i_g	Incidence géométrique de l'aile
V	Vitesse de référence
p	Pression statique
q_0	Pression dynamique de référence
K_p	Cœfficient de pression $K_p = \frac{p - p_0}{q_0}$
R_e	Nombre de Reynolds
ρ	Mass spécifique
i	Incidence
$oxyz$	Coordonnées cartésiennes
u	Composante selon ox de la vitesse de perturbation
v	Composante selon oy de la vitesse de perturbation
w	Composante selon oz de la vitesse de perturbation
Γ	Circulation
C_z	Cœfficient global de portance
$C_{z\,local}$	Coefficient local de portance

AVANT - PROPOS

La théorie de la ligne portante de Prandtl constitue une extension de la théorie de Joukowski au cas de l'écoulement tridimensionnel. Elle s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, assez discutables. Néanmoins son application au cas des ailes d'avions à faible incidence en écoulement uniforme fournit des résultats dont l'accord avec l'expérience est satisfaisant. Cette théorie a trouvé plusieurs autres applications.

Cependant,le fonctionnement des pales d'hélices ou de rotors d'hélicoptère présente des caractéristiques telles que les hypothèses de la théorie de Prandtl ne sont plus aussi bien vérifiées. Dans ce cas, un phénomène d'interaction entre profils contigüs se manifeste qui est dû aux conditions amont (vitesse ou incidence) variables en envergure. C'est à propos de calculs aérodynamiques de rotors que l'idée de l'existence de cette interaction "latérale" s'est présentée et qu'une analyse s'est révélée nécessaire.

Il faut bien voir que dans un calcul exact de surface portante, comme celui que permet la méthode des singularités réparties, l'effet d'interaction entre tranches est automatiquement présent dans le résultat. La nécessité d'une correction prenant cet effet en compte ne se manifeste que dans le schéma approché de la ligne portante de Prandtl ; schéma dont on est obligé de se contenter pour les rotors à cause de la complication et de l'encombrement du problème d'ensemble. On sait que dans le modèle de PRANDTL, chaque station est traitée comme un "profil" isolé soumis à une incidence locale qui comporte les vitesses induites dans le plan vertical, mais aucune interaction latérale (ni aucune évolution du champ induit suivant la corde de profil).

I. - INTRODUCTION.

L'objet de cette étude est de préciser dans quelle mesure les théories de ligne portante, issues des conceptions de Prandtl, permettent une définition correcte des distributions de circulation et de portance le long de surfaces aérodynamiques, soumises à des gradients transversaux d'incidence ou de vitesse importants, comme c'est le cas pour une pale de rotor.

Il s'agit aussi de définir, si besoin est, une correction théorique simple pour la prise en compte de l'effet transversal. Or, deux hypothèses sont présentes dans la théorie de Prandtl, dont on connait les principes :

- les sillages tourbillonnaires libres induisent sur les profils, des vitesses dont la variation le long de la corde de profil est négligée, puisque la surface est réduite à une ligne portante,

- les interactions entre profils ne sont pas prises en compte, puisque les composantes transverses des vitesses induites ne le sont pas.

Dans cette étude, la mise en évidence et l'analyse du phénomène d'interaction sont issues de deux expérimentations complémentaires :

a/ Aile d'allongement 3,5, très fortement vrillée, soumise à une vitesse amont uniforme ; c'est la variation latérale rapide des incidences, due au vrillage accentué qui fait se manifester l'effet en question de façon très nette : on constate en effet que le calcul de cette configuration par le schéma de PRANDTL, donne une répartition en envergure très éloignée de l'expérience (alors que

../...

dans les cas usuels, à gradients latéraux faibles, le même schéma donne une restitution très correcte).

Dans ce cas, une modification de l'équation intégro-différentielle de PRANDTL permet de rapprocher le calcul par ligne portante de l'expérience. Le progrès ainsi marqué est net relativement à la confrontation sans cette modification.

b/ Aile sans vrillage, soumise à une vitesse nettement variable selon l'envergure grâce à des pertes de charge amont convenablement réparties. Cette aile a été expérimentée entre panneaux.

Dans ce cas aussi l'application brutale du modèle de Prandtl (mais en y incluant la variation de vitesse en envergure) conduit à des résultats très écartés de l'expérience.

L'expérience entre panneaux s'est révélée d'une interprétation difficile due aux images tourbillonnaires à travers les panneaux et à la couche limite des panneaux. Ces effets ont été pris en considération lors des calculs de circulation par la théorie de la ligne portante et par la théorie modifiée (comme dans le cas précédent). La modification apporte une amélioration légère et peu satisfaisante.

La théorie de la ligne portante pour écoulement non-uniforme selon KARMAN et TSIEN donne une meilleure confrontation théorie-expérience.

II. - AILE VRILLÉE SOUMISE A UN ECOULEMENT AMONT UNIFORME.

Résoudre le problème de Prandtl, c'est déterminer la fonction de circulation en tout point de l'envergure d'une aile, donne par sa forme en plan et son incidence et le champ de vitesse où une telle aile est placée.

Il s'agit dans le cas présent d'une aile d'envergure finie d'un vrillage beaucoup plus marqué que dans les cas habituels, de manière à faire apparaître un fort gradient traversal. Les résultats d'étude théorique seront confrontés aux résultats d'expérience. On pourra ainsi évaluer le poids des hypothèses posées, et apprécier comment l'apport des termes complémentaires éventuellement introduits, corrigera les écarts calcul-mesure.

II. 1. - ETUDE EXPERIMENTALE.

Etude expérimentale consiste à mesurer les répartitions des pressions suivant la corde et suivant l'envergure sur l'extrados et sur l'intrados.

Les essais ont été effectués à la soufflerie S 2 de Saint-Cyr.

II. 1. 1.-DEFINITION DE LA MAQUETTE ETUDIEE.

L'aile est en bois, de forme rectangulaire, les profils sont du type NACA OO12 ; ses caractéristiques géométriques sont

../...

les suivantes :

Envergure	b	= 1,225 m
Corde	l	= 0,35 m
Allongement	λ	= 3,5
Surface	S	= 0,4288 m2.

Le vrillage, autour de la ligne à 25 % de la profondeur, est donné, en fonction de l'envergure $y = -\frac{b}{2}\cos\theta \quad (0<\theta<\pi)$.

$$i_g = i_o + 11{,}681\cos\theta - 1{,}681\cos 3\theta$$

où i_o est l'incidence moyenne disponible.

Cette loi permet une variation totale d'incidence de 20,2° le long de l'envergure (voir planche 4).

II. 1. 2.-DISPOSITION DES PRISES DE PRESSION.

La quantité des prises et tubes de pression nécessaires pour avoir le champ complet de pression posait une difficulté de mise en place des tubes dans l'épaisseur d'aile limitée. Elle a été résolue en divisant l'expérience en deux parties. En effet, les symétries d'aile vis-à-vis du vrillage et de la forme des profils ont permis de ménager les prises de pression sur une demi-envergure.

On dispose sur cette maquette de 8 sections de mesure, groupées deux par deux, distribuées le long de la demi-envergure de l'aile. Chaque section est équipée de 19 prises de pression réparties sur l'extrados, l'intrados et le bord d'attaque du profil.

La planche 1 A donne la position des prises de pressions sur l'aile.

La sortie des prises de pression s'effectue à l'extrêmité de la moitié non-équipée de l'aile. La mesure est donnée par deux manomètres à alcool, dont la capacité nécessite de procéder en deux fois, chacune concernant quatre sections de contrôle.

II. 1. 3.-MONTAGE D'ESSAIS.

L'aile vrillée a été essayée dans la veine de la soufflerie S 2 de Saint-Cyr. Un schéma de montage est montré (planches 2 et 3). Les caractéristiques principales de cette soufflerie sont les suivantes :

- Montage du type 3 mâts
- Soufflerie du type Eiffel avec chambre de tranquillisation amont et diffuseur court
- Veine semi-guidée de section rectangulaire avec les dimensions :

  largeur (B) = 2,2 m

  hauteur (H) = 1,8 m
- Vitesse maximale dans la veine = 55 m/s.
- Nombre de Reynolds Critique = 385,000.

Dans le cas présent, toutes les mesures ont été effectuées à la vitesse de soufflerie constante de 35 m/s qui donne un nombre de Reynolds de $0,85 \times 10^6$.

../...

II. 1. 4.-APPAREILLAGE DE MESURE.

L'appareillage de mesure est constitué de multimanomètres avec pression p_0 et p_{t_0} de référence mesurées au pitot.

II. 1. 5.-CORRECTION DES RESULTATS D'ESSAIS.

En présence d'une maquette, la limitation de la veine impose des contraintes locales, elle modifie la répartition des vitesses et entraine une variation de la vitesse à l'infini et de l'incidence. Pour rendre valables les résultats obtenus en soufflerie, la correction de la pression dynamique et de l'incidence est donc nécessaire.

II. 1. 5. 1.- CORRECTION DE LA PRESSION DYNAMIQUE.

Selon le programme des corrections utilisé par Vayssaire (Réf 8), cette correction comporte l'évaluation du blocage de volume, du blocage de sillage et du blocage de décollement. La Polaire expérimentale est tracée (pl.17) à l'aide des mesures directes de la portance et de la trainée sur la balance de la soufflerie pour chaque incidence moyenne. Ces corrections ont été calculées et se sont révélées négligeables.

II. 1. 5. 2. -CORRECTION D'INCIDENCE.

La formule de correction de TOUSSAINT dans le cas d'une aile vrillée n'est plus valable, car la circulation varie trop le long de l'envergure (voir pl. 18). Une méthode de calcul

de cette correction est proposée en annexe 1. Par cette méthode, la vitesse induite est calculée en chaque point sur l'envergure en tenant compte des images tourbillonnaires infinies dues aux quatre côtés de la veine pour chaque tourbillon libre. Partant de la répartition de la circulation expérimentale, la correction d'incidence est calculée et présentée dans la planche 4.

Soit θ , l'argument définissant la position y des profils d'aile le long de l'envergure b , tel que $y = -b/2 \cos\theta$

L'incidence géométrique de l'aile expérimentée est donné par :

$$i_g = i_o + 11,681 \cos\theta - 1,681 \cos 3\theta$$

La correction d'incidence venant en augmentation de l'incidence peut être exprimée :

$$\Delta i = 1,2 \cos\theta \qquad \text{(Pl. 4)}$$

L'incidence corrigée devient :

$$i_{g_c} = i_o + 12,881 \cos\theta - 1,681 \cos 3\theta$$

L'ascendance de la soufflerie (0°9') est ajoutée à cette incidence.

../...

II. 1. 6. PRESENTATION DES RESULTATS.

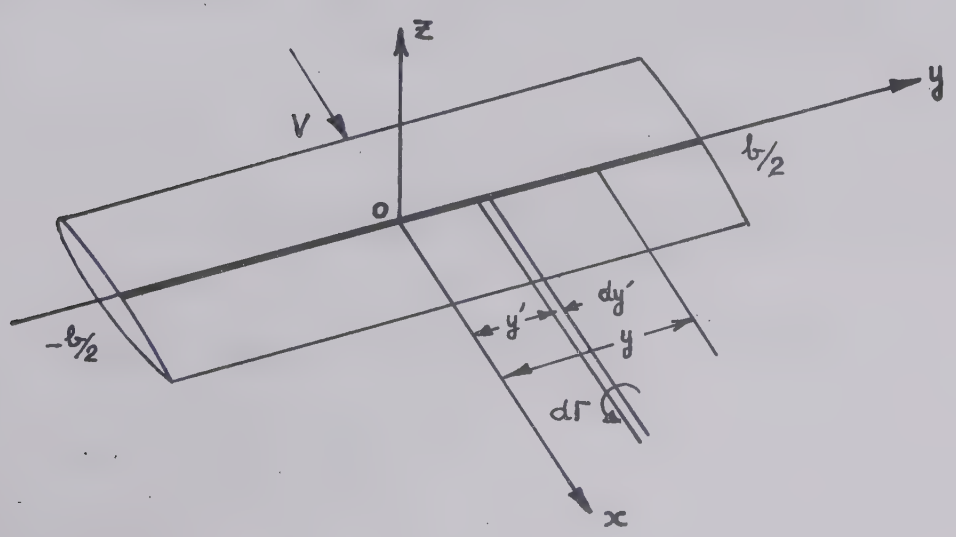
Les planches (5 à 10) donnent les répartitions de $K_p = \frac{p-p_0}{q_0}$ le long de la corde pour chaque section, pour l'incidence de référence $i_0 = 0°$. Pour l'incidence de référence de $i_0 = 2°$ et $i_0 = 8°$ les répartitions de K_p ont été tracées. Les planches (11 à 13) fournissent les portances locales expérimentales obtenues par l'intégration des K_p d'essais pour les incidences de référence de 0°, 2° et 8°.

II. 2. - ETUDE THEORIQUE.

II. 2. 1. - METHODE DE PRANDTL.

Rappelons rapidement les données de la méthode en question. Dans l'étude de l'aile d'envergure finie, Prandtl a remplacé celle-ci par une ligne portante $(-b/2, b/2)$. Sur cette ligne la vitesse induite par les tourbillons liés est nulle. Il faudra calculer la vitesse w induite par la nappe des tourbillons libres repartis sur l'envergure. Cette vitesse w est donnée par :

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{y - y'} \qquad (1)$$



Dans cette expression y' est la variable et $d\Gamma$ est fonction de y'. La vitesse induite varie le long de l'envergure. L'angle induit Δi est donné par :

$$\Delta i = \text{arc tg } \frac{w}{V} \approx \frac{w}{V}$$

Incidence effective $i = i_g + \Delta i$

où i_g = incidence géométrique (fonction de y).

Prandtl admet que le théorème de Joukowski s'applique encore, bien que l'écoulement ne soit pas rigoureusement plan.

$\Gamma(y)$ est donnée par :

$$\Gamma(y) = \pi V l \left\{ i_g(y) + \frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{y - y'} \right\} \quad (2)$$

Cette expression porte le nom d'équation intégro-différentielle de Prandtl.

Résoudre le problème de Prandtl, c'est déterminer la fonction de circulation en tout point de l'envergure d'une aile, donnée par sa forme en plan, son incidence et le champ de vitesse où une telle aile est placée. La méthode de résolution consiste à réduire l'équation intégro-différentielle de Prandtl à une équation différentielle linéaire.

Ici,on utilisera l'approximation de GLAUERT. Introduisant une nouvelle variable θ à la place de y .

$$y = -b/2 \cos\theta$$

où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ pour $-b/2 \leqslant y \leqslant b/2$

et $\Gamma(\theta)$ sera développé en série de Fourier :

$$\Gamma(\theta) = 2Vb \sum An \sin n\theta$$

An représentent les coefficients numériques.

La vitesse induite devient :

$$w(\theta) = -\int_0^\pi \frac{V}{\pi} \frac{\sum n An \cos n\theta' \, d\theta'}{\cos\theta - \cos\theta'}$$

Pour ce cas, la vitesse est uniforme le long de l'envergure.

$$w(\theta) = \frac{V}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sum n An \cos n\theta' d\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta}$$

Utilisant l'expression de l'intégrale de GLAUERT :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

en valeur principale au sens de Cauchy.

Donc

$$w(\theta) = V \sum \frac{n An \sin n\theta}{\sin\theta}$$

l'équation (2) devient

$$2Vb \sum An \sin n\theta = \pi V l \left\{ i_g(\theta) - \frac{\sum n An \sin n\theta}{\sin\theta} \right\}$$

$$\sum An \sin n\theta \left(\mu n + \sin\theta\right) = \mu \, i_g(\theta) \sin\theta \qquad (3)$$

où $\mu = \dfrac{\pi l}{2b}$

../...

L'équation (3) doit être vérifiée pour toute valeur de θ ce qui conduit à définir les cœfficients A_n par un système linéaire.

Ces cœfficients A_n sont ici déterminés par une résolution à partir de la méthode des moindres carrés. Un programme pour IBM a été réalisé. Ainsi obtient-on la valeur de la circulation en tout point de l'envergure.

II. 2. 2.-MODIFICATION DE LA METHODE PRANDTL.

Dans le cas d'une aile vrillée, il existe des vitesses transversales d'une grande importance. Dans le modèle de la ligne portante de Prandtl, chaque section est traitée comme une "profil" isolé soumis à une incidence locale qui comporte les vitesses induites dans le plan vertical, mais aucune interaction latérale.

On trouvera en annexe 2 la modification de la circulation dans le problème de Prandtl avec l'introduction des effets des vitesses transervales.

Un terme complémentaire $\delta\Gamma$ à la circulation Γ de Prandtl, dû à la vitesse transverse est donné par la relation suivante (annexe 2)

$$\frac{\partial^2(\delta\Gamma)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2} - \frac{4}{\ell}\delta\Gamma = 0 \qquad (4)$$

$$\Gamma_{\text{modifié}} = \bar{\Gamma} = \Gamma + \delta\Gamma$$

$$\frac{\partial^2\bar{\Gamma}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\delta\Gamma)}{\partial y^2}$$

../...

Donc (4) devient $\frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial y^2} - \frac{4}{\ell^2} \delta\Gamma = 0$

d'où $\delta\Gamma = \frac{\ell^2}{4} \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial y^2}$

et $\Gamma = \bar{\Gamma} - \frac{\ell^2}{4} \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial y^2}$ (5)

L'équation intégro-différentielle modifiée devient :

$$\bar{\Gamma} - \frac{\ell^2}{4} \frac{d^2 \bar{\Gamma}}{dy^2} = \pi V \ell \left\{ i_g(y) - \frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\bar{\Gamma}/dy'}{y'-y} \, dy' \right\} \quad (6)$$

Prenonstoujours une série de Fourier, pour déterminer cette nouvelle circulation (approximation de Glauert) :

$$\bar{\Gamma} = 2 V b \sum_{n=1}^{no} An \, \mathrm{Sin}\, n\theta \quad (7)$$

avec $y = -b/2 \cos\theta$

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{dy} = 4V \sum_{n=1}^{no} \frac{n \, An \, \mathrm{Cos}\, n\theta}{\mathrm{Sin}\,\theta}$$

et

$$\frac{d^2 \bar{\Gamma}}{dy^2} = -\frac{8V}{b \, \mathrm{Sin}^3\theta} \sum_{n=1}^{no} n \, An \left\{ n \, \mathrm{Sin}\, n\theta \, \mathrm{Sin}\theta + \mathrm{Cos}\, n\theta \cos\theta \right\}$$

L'équation (5) prend la forme :

$$2Vb \sum_{n=1}^{no} An \mathrm{Sin}\, n\theta + \frac{2V\ell^2}{b \, \mathrm{Sin}^3\theta} \sum_{n=1}^{no} n An \left\{ n \, \mathrm{Sin}\, n\theta \, \mathrm{Sin}\theta + \cos n\theta \cos\theta \right\}$$

$$= \pi V \ell \left\{ i_g(\theta) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{no} \frac{n \, An \cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta} \, d\theta \right\}$$

Utilisant l'expression de l'intégrale de GLAUERT

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta' \, d\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} = \frac{\mathrm{Sin}\, n\theta}{\mathrm{Sin}\,\theta}$$

en valeur principale au sens de CAUCHY, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{no} An \left\{ \sin n\theta \sin^2\theta \left(\sin\theta + n \frac{\pi l}{2b} \right) + n \frac{l^2}{b^2} \left(n \sin n\theta \sin\theta + \cos n\theta \cos\theta \right) \right\}$$

$$= \frac{\pi l}{2b} \, i_g(\theta) \sin^3\theta \qquad (8)$$

Comme précédemment les cœfficients An peuvent être définis par un système linéaire mais ont été déterminés ici par la méthode des moindres carrés. Un programme pour IBM dont la listing se trouve en annexe 5, a été réalisé. On peut donc obtenir cette circulation modifiée donnée par la relation (8).

L'incidence effective résulte de l'application de la formule de JOUKOWSKI

$$i \text{ effective} = \frac{\Gamma}{\pi V l}$$

La formule (6) ci-dessus montre bien que l'incidence en cause, ne se relie pas directement à l'incidence géométrique diminuée de l'incidence induite au sens de Prandtl, comme c'était le cas dans le problème classique. Il est clair que les champs de pression dans la conception de la ligne portante sont liés à cette incidence effective. On trouvera dans les diagrammes planches (5 à 10) l'influence sur les champs des pressions de l'interaction entre profils. Les répartitions des circulations et C_z local le long de l'envergure par les méthodes de Prandtl et Prandtl modifiée sont présentées dans les diagrammes (planches 11 à 16) pour les lois du vrillage suivantes :

$$i_g(y) = i_0 + 12{,}881 \cos\theta - 1{,}681 \cos 3\theta$$

../...

où $i_0 = 0,9' \; ; \; 2,9' \text{ et } 8,9'$

$i_g(y) =$ incidence géométrique

$y = -b/2 \cos\theta$ (position sur l'envergure)

Envergure de l'aile = 1,225 m.

(les valeurs ci-dessus sont celles choisies pour les expériences et elles ont été corrigées pour les limitations de veine).

II. 3. - CONFRONTATION THEORIE-EXPERIENCE.

Le schéma de calcul de la ligne portante de Prandtl, est très insuffisant pour les configurations de vrillage important. Le résultat de calcul avec l'effet des interactions des profils par l'introduction de la vitesse transerse dans le problème de Prandtl montre une amélioration nette, (planche 11 à 16) mais n'est certainement pas valable en bout de l'aile. C'est évidemment dû à la dérivée seconde de la circulation qui apparaît dans l'équation des circulations. On peut cependant utiliser le développement en remarquant que cette théorie modifiée comme celle de Prandtl, donnera des résultats insuffisants aux extrémités (existence des tourbillons marginaux).

../...

III. -AILE PLATE SOUMISE A UN ECOULEMENT NON-UNIFORME.

Dans ce cas le gradient transversal est fourni par la vitesse d'attaque, comme pour une pale de rotor. Cette partie sera essentiellement consacrée à l'étude d'une aile plate (non vrillée) soumise à un champ de vitesse linéaire et placée entre parois dans la soufflerie.

III. 1.- ETUDE EXPERIMENTALE.

Cette étude a exigé la création préalable dans la soufflerie d'un champ de vitesse à gradient transverse important, aussi uniforme que possible. Pour celà, plusieurs méthodes ont été essayées. La plupart des méthodes utilisaient des écrans plans de perte de charge placés dans l'écoulement. Pour une étude de ce type, il est nécessaire que le champ des pressions statiques soit uniforme et la turbulence réduite au minimum.

Compte tenu des inconvénients particuliers à chaque méthode, le dispositif finalement retenu consiste en un grillage situé en amont de la veine formant une surface pseudo-parabolique (planche 25). La méthode de calcul de cette forme est exposée dans l'annexe 3. On applique la fameuse relation de Elder linéarisée qui lie la vitesse amont et en aval du grillage et la perte de charge du grillage. La forme non dimensionnelle de grillage pour obtenir un champ de vitesse linéaire est tracée dans la diagramme (planche 24).

La fixation du grillage au coffrage posait initialement quelques problèmes pour maintenir le grillage dans sa forme. Des dispositifs simples ont permis de les résoudre. La planche 20B montre le coffrage et la fixation du grillage. On a ainsi obtenu

un champ à gradient relativement important et à peu près constant sur une portion suffisante de la section de chambre d'expérience de la soufflerie de 0,5 m de Saint-Cyr dont les caractéristiques sont données plus loin.

III. 1.1. DEFINITION DE LA MAQUETTE : DISPOSITION DES PRISES DE PRESSION.

L'aile est en bois, de forme rectangulaire. Les profils sont du type NACA 0012.

Seule la section médiane de l'aile est équipée de 19 prises de pression réparties sur l'extrados, l'intrados et le bord d'attaque du profil.

La corde constante est de 0,12 m et l'envergure de 1 m.

L'aile ayant une envergure double de la largeur de la veine, on obtient la mesure par déplacement latéral de l'aile, la section médiane balayant ainsi toute la largeur de la veine.

III. 1. 2. MONTAGE D'ESSAIS.

La maquette est placée entre parois. Les supports des deux extrêmités sont dans des guides circulaires qui permettent de faire varier l'incidence (voir pl. 19 et 20).

../...

III. 1.3. EQUIPEMENT DE LA VEINE.

La veine dont les parois sont en plexiglass est de section circulaire :

de diamètre intérieur (D) = 0,5 m
la longueur utile étant L = 0,77 m.

Elle comporte 4 évidements permettant l'accès à l'intérieur. Ces évidements dont la longueur est celle de la veine sont répartis régulièrement sur la circonférence, et ont une largeur telle qu'ils découvrent chacun un angle au centre de 45° ; ils peuvent être obturés par deux demi-portes. Pour le présent essai les deux évidements latéraux diamétralement opposés ont été équipés différemment : les deux demi-portes ont été remplacées par des panneaux verticaux qui servent de support à la maquette. Cette modification a été adoptée d'une part pour faciliter le montage et d'autre part pour obtenir le champ de vitesse désiré.

III. 1.4. CARACTERISTIQUES DU CHAMP DE VITESSE.

L'étude théorique de l'obtention d'un champ de vitesse linéaire dans la soufflerie est donnée en annexe 3. Les planches 21 à 23 donnent la variation de vitesse obtenue en envergure pour chaque vitesse de référence. La vitesse de référence est donnée par un pitot situé à 300 mm en amont du bord d'attaque d'aile.

../...

Plusieurs essais ont été effectués pour voir les effets de présence des différents éléments introduits.

- Essais pour établir l'uniformité de l'écoulement sans le grillage.
- Essais sans maquette mais avec grillage pour justifier l'obtention de champ de vitesse et améliorer la linéarité de champ de vitesse.
- Essais pour voir l'effet de la présence de la canne pitot servant à la mesure. Une source d'erreur constatée résultait de l'obstruction variable apportée par la canne pitot, du fait de sa pénétration variable dans la veine. Le remède a été de faire en sorte que la canne en question traverse la veine de part en part.
- Essais pour établir le champ de vitesse en envergure située à une hauteur non diamétrique. On constate que le champ de vitesse ne varie pas sur 181 mm de hauteur au milieu de la soufflerie (90,5 mm au-dessus et en-dessous de la ligne yy .) (pl. 19).
- Essais de turbulence. L'intensité de turbulence est assez faible, c'est-à-dire 0,1 % tolérée dans une soufflerie de pureté moderne sauf très près des parois où le développement de la couche limite est assez important et l'écoulement est turbulent.

III. 2.- ETUDE THEORIQUE.

Le problème d'aile placée dans un écoulement non-uniforme a été étudié par plusieurs auteurs.

LIGHTHILL, en 1957 a donné une étude détaillée de l'action de perturbations tridimensionnelles apportées par un obstacle

lointain dans un écoulement non-uniforme. Deux méthodes principales existent pour résoudre ce problème. L'une, par la considération d'un écoulement secondaire a été avancée par SQUIRE et WINTER (1951), l'autre s'appuie sur l'hypothèse d'une petite perturbation due à un obstacle tridimensionnel dans un écoulement non-uniforme. Cette dernière hypothèse a été utilisée par KARMAN et TSIEN en 1945, en évolution de la théorie de la ligne portante. JOHANSSAN en 1967, a résolu le même problème par une méthode de développement asympbotique. Il a considéré la théorie de la ligne portante de PRANDTL comme un problème de perturbation singulière engendrée par le tourbillon attaché dans un écoulement quelconque déjà défini par M. VAN DYKE.HONDA en 1959 a traité le cas d'une aile mince entre parois et à faible incidence soumise à un champ de vitesse quelconque. La méthode de KARMAN et TSIEN dont la description se trouve en annexe, est résolue par l'analyse numérique.

Enfin, la méthode de PRANDTL avec la modification pour l'introduction de la vitesse transverse et applicable à ce cas est présentée dans cette étude.

La théorie de la ligne portante selon HONDA donne des résultats très éloignés de l'expérience. La méthode de HONDA pour l'aile mince a aussi été appliquée à ce cas et donne des résultats dont l'accord avec l'expérience est satisfaisant mais sa mise en oeuvre est malheureusement extrêmement longue.

.../...

III. 2. 1. METHODE DE PRANDTL.

On obtiendra d'abord une distribution de circulation par la méthode de Prandtl, simple, appliquée à une telle aile entre parois. Les effets de corrections de parois et de la couche limite ont été négligés pour ces premiers développements.

On peut représenter la distribution de circulation par

$$\Gamma = 2 V_0 b \left\{ \sum_{n=1}^{no} An \sin n\theta + \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \right\} \qquad (9)$$

ou b = l'envergure d'aile (distance entre parois)

V_0 = la vitesse moyenne.

Cette distribution donne des valeurs non-nulles aux extrêmités :

Un champ de vitesse sera représenté par :

$$V(y) = V(\theta) = V_0 + V_1 \cos\theta$$

$$\frac{d\Gamma}{dy} = 2 V_0 b \left\{ \sum_{n=1}^{no} n\, An \cos n\theta - \gamma_1 \sin\theta \right\} \frac{1}{b/2 \sin\theta}$$

La vitesse induite est donnée par :

$$w(y) = w(\theta) = \frac{V_0}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{no} n\, An \cos n\theta - \gamma_1 \sin\theta' \right\}}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta'$$

Utilisant l'expression de l'intégrale de Glauert en valeur principale du sens de Cauchy, on obtient :

$$w(\theta) = \frac{V_0}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{no} \frac{\pi\, n\, An \sin n\theta}{\sin\theta} - \gamma_1 \log \operatorname{tg} \theta/2 \right\} \qquad (10)$$

../...

L'équation intégro-différentielle de Prandtl se réduit à :

$$2V_0 b\left\{\sum_{n=1}^{no} An \sin n\theta + \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2\right\}$$
$$= \pi V(y).l\left\{i_g - \frac{1}{V(y)}\cdot\frac{V_0}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{no}\frac{n\pi An \sin n\theta}{\sin\theta} - \gamma_1 \log tg\,\theta/2\right)\right\}$$

Dans l'ordre des cœfficients on obtient :

$$\sum_{n=1}^{no} An \sin n\theta\left\{\sin\theta + n\cdot\frac{\pi l}{2b}\right\} + \gamma_1 \sin\theta\left\{\cos\theta - \frac{l}{2b}\log tg\,\theta/2\right\}$$
$$+ \gamma_2 \sin\theta = \frac{\pi l}{2b}\,\frac{V(y)}{V_0}\,i_g \sin\theta \qquad (11)$$

C'est une équation différentielle linéaire et un programme a été réalisé pour déterminer les cœfficients An, γ_1 et γ_2 ainsi que la distribution de la circulation.

III. 2.2. METHODE DE PRANDTL MODIFIEE.

Soit $\bar{\Gamma}$ la circulation modifiée représentée par le développement

$$\bar{\Gamma} = 2V_0 b\left\{\sum_{n=1}^{no} An \sin n\theta + \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2\right\}$$

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{dy} = 4V_0\left\{\sum_{n=1}^{no}\frac{n An \cos n\theta}{\sin\theta} - \gamma_1\right\}$$

$$\frac{d^2\bar{\Gamma}}{dy^2} = -\frac{8V_0}{b\sin^3\theta}\sum_{n=1}^{no}\left\{n An(n\sin n\theta\sin\theta + \cos n\theta\cos\theta)\right\}$$

La vitesse induite est donnée par :

$$w(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{d\bar{\Gamma}/dy'}{y'-y}\,dy' = \frac{V_0}{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{no}\frac{n\pi An\sin n\theta}{\sin\theta} - \gamma_1 \log tg\,\theta/2\right\} \qquad (12)$$

Pour ce cas, l'équation (6) devient

$$2V_0 b\left\{\sum_{n=1}^{no} An\sin n\theta + \gamma_1\cos\theta + \gamma_2\right\} + \frac{2l^2V_0}{b\sin^3\theta}\sum_{n=1}^{no}\left\{nAn(n\sin n\theta\sin\theta + \cos n\theta\cos\theta)\right\}$$
$$= \pi V(\theta).l\left\{i_g - \frac{V_0}{\pi V(\theta)}\left(\sum_{n=1}^{no}\frac{\pi n An\sin n\theta}{\sin\theta} - \gamma_1\log tg\,\theta/2\right)\right\}$$

or

$$\sum_{n=1}^{no} An\left\{\left(\sin\theta + n\frac{\pi l}{2b}\right)\sin n\theta\sin^2\theta + \frac{l^2}{b^2}n(\cos n\theta\cos\theta + n\sin n\theta\sin\theta)\right\}$$
$$+\gamma_1\left(\cos\theta - \frac{l}{2b}\log tg\,\theta/2\right)\sin^3\theta + \gamma_2\sin^3\theta = \frac{\pi l}{2b}\,\frac{V(\theta)}{V_0}\,i_g\sin^3\theta \quad \ldots (13)$$

On peut déterminer les cœfficients A_n, γ_1, γ_2 et donc cette circulation modifiée, par la résolution de ce système linéaire par les moindres carrés (Réf. annexe 5).

III. 2.3. CORRECTION DE PAROIS.

Pour une aile expérimentée dans une veine guidée circulaire, la vitesse induite due aux parois est donnée par :

$$w_c(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y' \, d\Gamma(y')}{R^2 - yy'}$$

où R est le rayon de la paroi.

Pour le problème d'aile entre parois cette vitesse doit être ajoutée à la composante de vitesse ($w(y)$) induite par tourbillons libres (équation 12). Mais le problème devient assez complexe et il est difficile de le résoudre. On calculera $w_c(y)$ avec Γ déjà déterminé (III. 2. 2.).

$w_c(y)$ peut être écrite :

$$w_c(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{-b/2 \cos\theta' \left[4V_0 \left(\sum n A_n \cos n\theta - \gamma_1 \sin\theta\right)\right]}{R^2 - b^2/4 \cos\theta \cos\theta'} d\theta'$$

Soit $\kappa = b^2/4R^2 \cos\theta \quad (|\kappa| < 1)$

On obtient :

$$w_c(\theta) = \frac{bV_0}{2R^2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left(\sum n A_n \cos n\theta' \cos\theta' - \gamma_1 \sin\theta' \cos\theta\right)}{(1 - \kappa \cos\theta')} d\theta'$$

$$= \frac{bV_0}{2\pi R^2} \left[\sum_{n=1}^{no} n A_n \int_0^{\pi} \cos n\theta' \cos\theta' \left(1 + \kappa\cos\theta' + \cdots \kappa^m \cos^m\theta'\right) d\theta' \right.$$

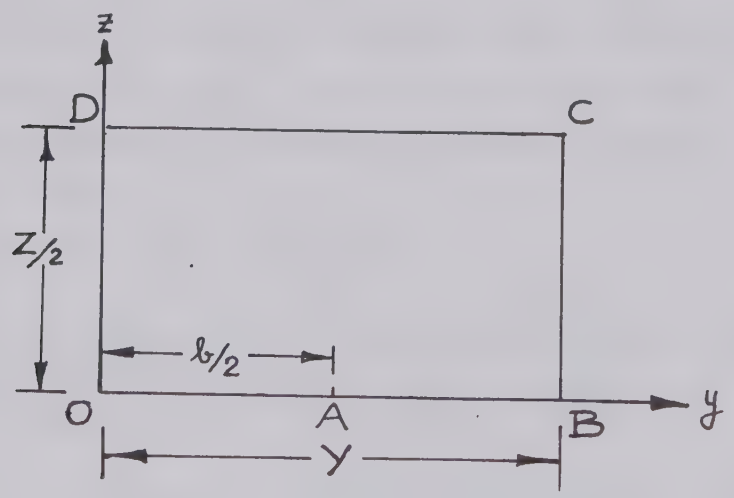
$$\left. - \gamma_1 \int_0^{\pi} \sin\theta' \cos\theta' \left(1 + \kappa\cos\theta' + \cdots \kappa^m \cos^m\theta'\right) d\theta' \right]$$

../...

Or, un développement en série suivi d'une intégration terme à terme évidemment valable, pour une valeur de n_0 connue.

III. 2.4. APPLICATION DE LA THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE SELON KARMAN ET TSIEN.

La théorie de Von Karman et Tsien, relative au calcul des caractéristiques aérodynamiques d'une aile placée dans un vent variable $V(y)$, est exposée en annexe 4. On appliquera cette théorie pour déterminer une fonction potentielle des vitesses $\phi(y,z)$ définie par les relations suivantes dans un domaine plan O A B C D situé dans le plan de TREFFTZ :



avec $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V^2}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{V^2}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0$$

$$\phi = \frac{\pi . \rho . l}{2} V^2(y) \left\{ i_g + \frac{1}{2\rho V^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \text{ , sur OAB}$$

La fonction potentielle ϕ doit être nulle sur AB. Sa dérivée normale $\partial\phi/\partial n$ doit l'être sur BC , CD et OD.

Où $Y/2$ et $Z/2$ sont demi largeur et demi hauteur de la veine.

Les vitesses de perturbation sont reliées à ϕ par les relations suivantes :

$$v_0 = \frac{v_1}{2} = \frac{1}{2\rho V(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$w_0 = \frac{w_1}{2} = \frac{1}{2\rho V(y)} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

La circulation $\Gamma(y)$ a pour l'expression

$$\Gamma(y) = 2\phi(y)/\rho V(y)$$

Cette circulation a été calculée numériquement par les méthodes aux différences finies classique - (Successive over - relaxation, SOR).

Cette méthode est appliquée à l'aile expérimentale (rectangulaire - cor de = 0,12 m et envergure (b) = 0,466 m) soumise à un champ de vitesse linéaire donné par :

$$V(y) = 12,5 + 14,0\ y$$

Les résultats figurent sur les planches 26 à 29.

../...

III. 2.5. CORRECTION DE LA COUCHE LIMITE.

L'existence de couches limites de parois suggère la présence de tourbillons d'extrêmités très proches des parois, complétés par les tourbillons images correspondants. On peut évaluer sans difficulté l'ordre d'épaisseurs schématisées ϵ et ϵ' des couches limites.

Pour ce cas d'expérience.

Epaisseurs de couches limites après parcours de 0,95 mètre :

Vitesse moyenne $V_0 = 19,5$ m/s à $y = 0$

Pour $y = -0,233$

$V = 26,5$ m/s Nombre de Reynolds = $1,67 \times 10^6$

$V/V_0 = 1,36$ (détente)

$\epsilon' = 4,1 \times 10^{-3}$ m

Pour $y = +0,233$

$V = 12,5$ m/s Nombre de Reynolds = $1,0 \times 10^6$

$V/V_0 = 0,64$ (compression)

$\epsilon = 2 \times 2,8 \times 10^{-3}$ m.

$= 5,6 \times 10^{-3}$ m.

../...

D'où les angles induits par les tourbillons de chute de circulation et leurs images.

$$\frac{\Delta W}{V} = \frac{2\epsilon}{4\pi}\left\{\frac{\Gamma}{(y-0{,}233)^2} - \frac{\Gamma'}{(y+0{,}233)^2}\right\}$$

Pour $y = 0{,}155$ $\quad \Delta\Gamma = -0{,}0245$ $\quad \frac{\Delta W}{V} = -2{,}75 \times 10^{-3}$

$y = -0{,}155$ $\quad \Delta\Gamma = +0{,}0265$ $\quad \frac{\Delta W}{V} = 4{,}8 \times 10^{-3}$

III. 3. METHODE DE HONDA

HONDA (Réf. 5) a donné une méthode de calcul des caractéristiques aérodynamiques d'une aile mince placée entre parois parallèles dans un écoulement non-uniforme. Cette théorie a été appliquée au cas présent. La méthode d'application se trouve en Annexe 6. Les calculs ont été faits pour une aile à une incidence de 4° soumise à un champ de vitesse linéaire. ($V = 12{,}5 + 14\ y$). Le résultat (Cz local) ainsi obtenu est confronté avec celui de l'expérience. (Pl. 26)

En posant $q = (1/4\ K)^2 = 0$ dans les relations pour P de la théorie de HONDA, la valeur propre K étant inversement proportionnelle à l'allongement λ , on obtient la théorie de **la ligne portante**. (**Annexe 6**)

III. 4. CONFRONTATION THEORIE-EXPERIENCE.

La PL. 26 fournit les distributions des Czlocal obtenues par l'intégration des Kp à chaque point le long de la corde pour une aile plate attaquée par le vent variable d'incidence 4°. La distribution de la circulation expérimentale est présentée **sur la** pl. 27.

.../...

La confrontation de cette distribution de circulation avec celle calculée par la méthode de PRANDTL, en supposant que la circulation s'appuie sur les parois, montre l'importance des effets de parois.

La correction d'interaction entre profils, qui est liée à la dérivée-seconde de la distribution de circulation de PRANDTL, est assez faible. Le résultat ne se trouve donc que sensiblement amélioré.

Sur la planche est représentée la distribution de circulation avec la méthode de PRANDTL modifiée et avec la correction de parois. L'effet des couches limites des parois conduit à une confrontation théorie-expérience sensiblement améliorée.

La solution théorique de KARMAN TSIEN tient compte, au premier ordre, de l'existence d'un champ ambient rotationnel uniforme et sa confrontation avec l'expérience est assez satisfaisante;

La méthode de HONDA pour une aile entre parois dans un écoulement non-uniforme donne une solution exacte du problème à cela près que les effets de viscosité ont été négligés : la confrontation (planche 26) est assez bonne mais la méthode est très compliquée car la solution est obtenue par les valeurs propres.

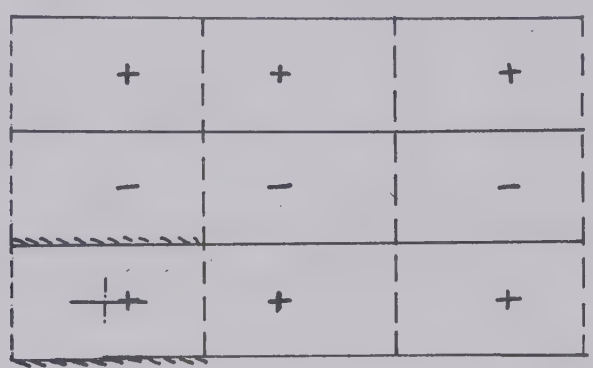
La théorie de l'allongement infini dans cette méthode conduit à des résultats très éloignés de l'expérience.

ANNEXE 1

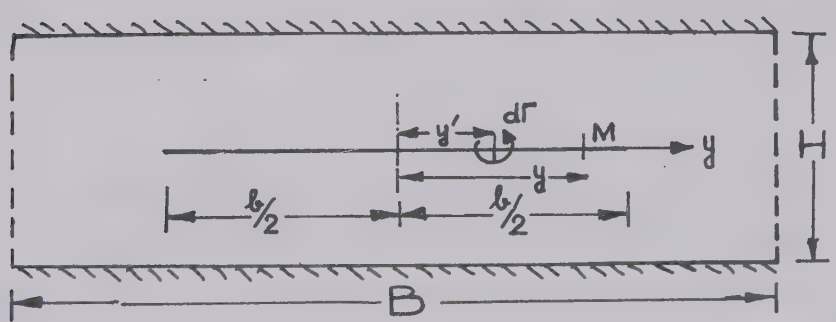
CORRECTION DE PAROIS POUR UNE AILE VRILLEE EXPERIMENTEE DANS UNE VEINE RECTANGULAIRE SEMI-GUIDEE

La méthode de calcul de Toussaint comporte l'hypothèse d'une distribution uniforme de la circulation sur l'envergure de l'aile. Cette hypothèse n'est plus valable pour le cas d'une aile très vrillée où existe une forte variation de circulation le long de l'envergure. Cette variation nécessite le calcul de la correction d'incidence à chaque point de l'envergure.

(a)



(b)



Considérons un point M situé à une distance y du plan de symétrie de l'aile d'envergure b et un tourbillon libre élémentaire d'intensité $d\Gamma$ situé à la distance y' du plan de symétrie (fig. b)

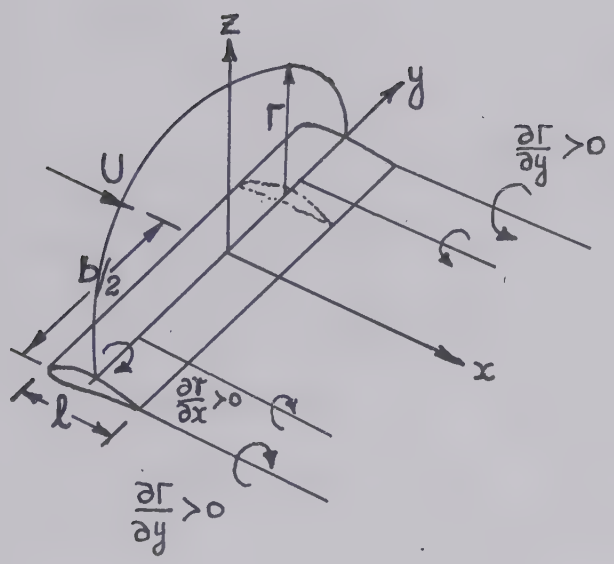
Ce tourbillon élémentaire donne une suite infinie des tourbillons images dues aux parois solides et fluides (même sens pour paroi fluide et sens opposé pour paroi solide) d'une veine rectangulaire semi-guidée d'une largeur B et d'une hauteur H. (fig. a). La vitesse induite en M due à ces tourbillons images est donnée par :

$$(dW)_y = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4}{b} d\Gamma \left\{ \frac{(-1)^K (y-y')}{\left(\frac{2KH}{b}\right)^2 + (y-y')^2} + \frac{y' + (-1)^{K+1} \cdot y}{\left(\frac{2KB}{b}\right)^2 - \left[y' + (-1)^{K+1} y\right]^2} \right\}$$

La répartition de la circulation expérimentale est calculée par l'intégration des pressions le long de la corde pour chaque section de l'envergure. Un nombre fini (N) de tourbillons libres est considéré répartis le long de l'envergure. Leur intensité est calculée par l'increment de la circulation dans chaque partie b/N de l'envergure. On peut donc calculer la vitesse induite en M, (W) y due aux images de tous les tourbillons libres répartis le long de l'envergure. Ces calculs numériques ont été effectués à l'aide d'un programme simple sur I.B.M., la nombre dépendant de la précision désirée.

ANNEXE 2

INTRODUCTION DE LA COMPOSANTE DE VITESSE TRANSVERSE DANS LE PROBLEME DE L'AILE D'ENVERGURE FINIE DE PRANDTL



L'aile d'envergure finie b, plate, de corde l (ici prise comme une constante) sous incidence $i_g(y)$ et vitesse U extérieure d'abord uniforme, fait apparaître, sur la ligne portante de Prandtl une distribution $\Gamma(y)$ de la circulation, sur laquelle, vers l'aval s'attache une nappe plane (ou presque) de tourbillons longitudinaux.

u, W, étant les composantes de vitesses indiutes par le système de tourbillonnaire, la pose du problème de Prandtl, revient à exprimer sur chaque profil de profondeur l faible vis-à-vis de l'envergure b, les deux conditions bidimensionnelles :

- de continuité : $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

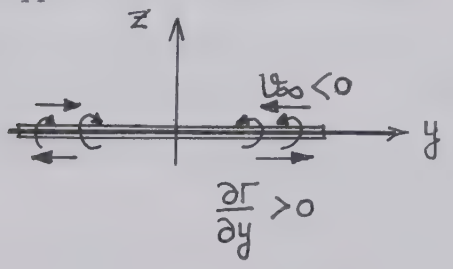
- de glissement relatif $$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{U+u}$$ sur la paroi.

Sur le profil, on a en outre : $$\frac{\partial \gamma(x,y)}{\partial x} = 2u$$

et $$\Gamma(y) = \int_0^l \frac{\partial \gamma}{\partial x}\, dx$$

.../...

La nappe des tourbillons libres constitue une coupure telle que, à



l' ∞ aval : $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial y} = -2 v_\infty$

v étant la 3ème composante de vitesse de perturbation.

Au droit des profils (condensés sur la ligne portante) une demi nappe seulement induit la vitesse transversale v et l'on a donc :

$$v = \frac{1}{2} v_\infty = -\frac{1}{4} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}$$

(le tourbillon attaché ne contribue pas à v).

Cette composante de vitesse n'est pas prise en compte dans le problème de Prandtl. Son introduction apporterait à la solution

$\Gamma(y)$, $\partial \gamma(x,y)/\partial x$, $u(x,y)$, $w(x,y)$ des perturbations

$\partial(\delta\gamma)/\partial x$, $\delta\Gamma(y)$, δu , δv , δw , avec lesquelles on doit encore satisfaire aux conditions précédentes :

$$\frac{\partial \gamma_{tot}}{\partial x} = \frac{\partial(\gamma+\delta\gamma)}{\partial x} = 2 u_{tot} \quad , \qquad \frac{\partial \Gamma_{tot}}{\partial y} = -4 v_{tot}$$

$$\frac{\partial u_{tot}}{\partial x} + \frac{\partial v_{tot}}{\partial y} + \frac{\partial w_{tot}}{\partial z} = 0 \quad , \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{w_{tot}}{U + u_{tot}}$$

On en tire, compte tenu des relations écrites :

1º) $$\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial z} + \frac{\partial v_{tot}}{\partial y} = 0$$

2º) $$\frac{dz}{dx} = \frac{w+\delta w}{U+u+\delta u} = \frac{w}{U+u}$$ d'où $$\frac{\delta w}{w} - \frac{\delta u}{U+u} \approx 0$$

ou encore $$\frac{\delta w}{\delta u} = \frac{w}{U+u} \approx \frac{w}{U}$$

(u, w petits devant U). Ceci montre que, pour $\delta u/U$ du 1º (o) de petitesse, $\delta w/U$ sera du 2nd (o) donc négligeable.

Nous admettrons que $\partial\,\delta w/\partial z$ sera négligeable de ce fait, devant $\partial\,\delta u/\partial x$ faible).

Il restera alors pour la condition de continuité en $\frac{\partial \delta u}{\partial x}$, $\frac{\partial \delta w}{\partial z}$, $\frac{\partial v_{tot}}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} \simeq - \frac{\partial v_{tot}}{\partial y} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\delta\Gamma)}{\partial y^2} \right),$$

c'est-à-dire, en intégrant par rapport à x à partir du BA (point d'arrêt), pris comme origine des x :

$$\delta u(x) = \int_0^x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\, dx = \frac{1}{4} \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\delta\Gamma)}{\partial y^2} \right\} dx$$

Ici, Γ, $\delta\Gamma$ sont indépendants de x, d'où, avec $\delta u(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial \delta\gamma}{\partial x}$

$$\delta u(x) = \frac{1}{2} \frac{d\,\delta\gamma(x)}{dx} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\delta\Gamma)}{\partial y^2} \right\} \cdot x$$

Intégrons une deuxième fois par rapport à x, de o à ℓ, avec

$\delta\Gamma = \int_0^\ell \frac{\partial \delta\gamma}{\partial x}\, dx$, il vient enfin, puisque $\int_0^\ell x\, dx = \frac{\ell^2}{2}$

$$\delta\Gamma - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\delta\Gamma)}{\partial y^2} \right\} \frac{\ell^2}{2} = 0$$

$$\underline{\frac{\partial^2 (\delta\Gamma)}{\partial y^2} - \frac{4}{\ell^2} \delta\Gamma + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} = 0}$$

.../...

ANNEXE 3

OBTENTION D'UN CHAMP DE VITESSE LINEAIRE DANS UNE SOUFFLERIE

-=-

1.- INTRODUCTION

Pour évaluer valablement la défaillance de la théorie de Prandtl dans le cas d'un champ de vitesse linéaire, il est nécessaire que par ailleurs, le champ des pressions statiques soit uniforme et la turbulence réduite au minimum.

Il existe plusieurs méthodes permettant d'obtenir un champ de vitesse particulier dans une soufflerie. La plupart des méthodes utilisent un écran de perte de charge placé dans l'écoulement. On trouvera ci-dessous quelques renseignements sur ces méthodes, leur réalisation pratique et leur influence sur l'écoulement dans la soufflerie (intensité de turbulence et variation de pression statique dans la veine par exemple).

En 1957, Owen et Zienkiewicz ont utilisé un système de barreaux cylindriques dont l'écartement varie graduellement pour obtenir un champ de vitesse linéaire. Gould et Al en 1968 ont appliqué cette méthode. Ils ont trouvé que l'intensité de turbulence due aux barreaux est de l'ordre de 6 % par rapport à 0,1 % toléré dans une soufflerie de pureté moderne.

Elder en 1958 a étudié l'écoulement au travers d'un grillage non-uniforme et d'une forme quelconque. Il a établi une relation linéaire entre les propriétés du grillage, la forme du grillage et les distributions de vitesse à l'infini amont et en aval du grillage. Turner en 1968 a présenté une méthode pratique pour l'analyse de l'écoulement bidimensionnel au travers d'un grillage non-uniforme. Cette méthode est basée sur la théorie linéarisée de Elder et donne des résultats dont l'accord avec l'expérience est satisfaisant.

Mc Carthy en 1964 a considéré le problème de l'écoulement tridimensionnel au travers des grilles non uniformes normales. Son analyse peut être considérée comme une extension de celle de Elder, moins restrictive quant à la variation de la résistance ou de la vitesse dans la veine. Mais elle ne peut s'appliquer aux grillages de forme arbitraire. Les calculs qui concernent cette méthode sont plus complexes pour une veine circulaire.

Une autre classe de méthodes consiste à placer des grilles d'aubes en amont et en aval de la section d'essais de manière à obtenir par induction tourbillonnaire l'effet recherché ; un dispositif correspondant à ce genre de méthode a été calculé, mais dans les conditions d'expérience imposées, il ne permettait pas d'obtenir un gradient de vitesse suffisant.

Compte tenu des inconvénients particuliers à chaque méthode, nous avons finalement choisi celle de Elder pour réaliser le champ de vitesse désiré.

2.- PARAMETRES DE L'ECRAN

Un écran de perte de charge peut être considéré comme une surface à travers laquelle existe une discontinuité de pression et de vitesse. Le fluide doit obéir à l'équation de continuité et à un certain nombre de conditions, fonctions de la géométrie de l'écran et de paramètres empiriques.

Le coefficient de perte de charge K est donné par la relation :

$$\Delta p = K \left[\frac{1}{2} \rho U_n^2 \right]$$

où Un est la composante de vitesse locale normale à l'écran et Δp est la pression statique.

Le coefficient de Portance (B) de l'écran est défini par :

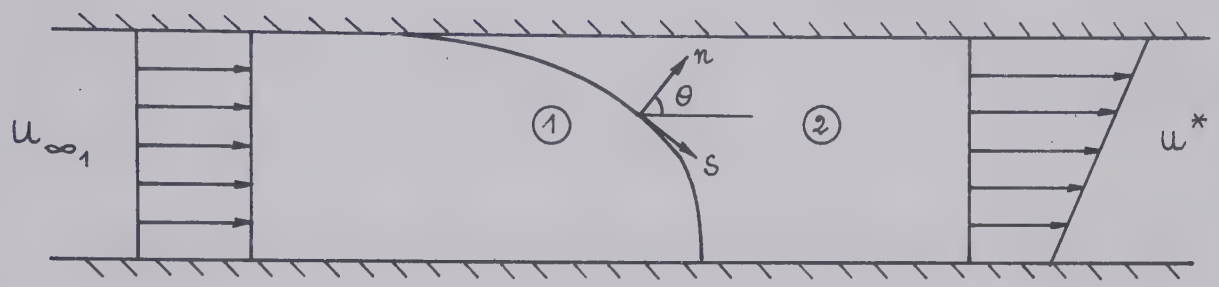
$$B = (V_{S_1} - V_{S_2}) \; V_{S_1}$$

$$\text{or } B = 1 - \frac{1,1}{\sqrt{1 + K}} \quad \text{(empirique)}$$

V_{S_1} et V_{S_2} sont les composantes de vitesse locale tangentielle à l'écran de part et d'autre de celui-ci.

3.- EQUATION DE MOUVEMENT A TRAVERS L'ECRAN

On considère un écoulement bidimensionnel dans un canal limité par deux parois parallèles. La figure suivante indique la position de la grille dans le canal.



On peut exprimer la variation de la vitesse à travers la grille compte tenu de ses caractéristiques, par la fameuse relation de Elder linéarisée.

$$u - u^* = \gamma_o (q - 1) + \frac{1}{2} S \gamma_o$$

où $u = \frac{u_{\infty_1}}{U}$ et $u^* = \frac{u_{\infty_2}}{U}$ sont les vitesses relatives à l'infini amont et en aval de la grille.

A la surface de la grille :

$$q = \frac{u_1}{U}$$

Le coefficient de perte de charge effectif γ est lié au coefficient de perte de charge normal K et à la grille θ par rapport à l'écoulement, par la relation

$$\gamma = K \cos^2 \theta$$

On suppose que θ et les variations de K sont petits. En linéarisant il vient :

$$v = v_0 \left[1 + S(y) \right]$$

La grille produit une perturbation Ψ^* dans l'écoulement principal, dont la fonction de courant est Ψ_0 . La fonction totale est donnée par :

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi^*$$

La perturbation satisfait aussi à l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \psi^* = 0 \ ;$$

la solution est de la forme :

$$\frac{\Psi^*}{L\bar{U}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{n\pi} \exp\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad \text{pour } x < 0$$

$$\frac{\Psi^*}{L\bar{U}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{n\pi} \exp\left(-\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad \text{pour } x > 0$$

Pn et Qn sont les constantes de Fourier, x et y sont les coordonnées, L étant la hauteur du canal.

On suppose que la grille coïncide avec le plan x = 0. La vitesse, donnée par la fonction de courant Ψ^* , doit satisfaire à l'équation de continuité :

$$q = u - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos n\omega = u^* - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\omega$$

où $\omega = \frac{\pi y}{L}$ est un paramètre sans dimension.

On obtient :

$$u - u^* = \gamma_0 (q-1) + \frac{1}{2} \gamma_0 S$$

$$\frac{1}{2} \gamma_0 S + \gamma_0 (u-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\omega$$

$$B \operatorname{tg} \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin n\omega$$

Considérons le cas d'une grille uniforme avec S = 0.

Il en résulte : $v = v_0$

En amont, la vitesse est uniforme et égale à U_0 ; nous désirons obtenir un profil de vitesse linéaire donné par la relation :

$$u = U_0 + \lambda \left(\frac{y}{l} - \frac{1}{2} \right)$$

D'autre part :

$$\left(\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = v \sum_{1}^{\infty} P_n \cos n\omega$$

où $\frac{\omega}{\pi} = \frac{y}{l}$

Exprimant $\left(\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$ comme une série de Fourier :

$$\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{\pi^2} \left[\cos\omega + \frac{\cos 3\omega}{3^2} + \frac{\cos 5\omega}{5^2} + \cdots\cdots \right]$$

il vient :

$$P_n = \left[-\frac{4}{\nu \pi^2} \quad \frac{1}{n^2} \right] \quad (n \text{ impair})$$

$$\sum_1^\infty Q_n \cos n\omega = \lambda \left(\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \sum_1^\infty P_n \cos n\omega$$

$$= (1 + \nu) \sum_1^\infty P_n \cos n\omega$$

$$BT = \sum_1^\infty (2 + \nu - B) P_n \sin n\omega$$

Soit :

$$BT = \frac{\nu}{E} \sum_1^\infty P_n \sin n\omega$$

où

$$E = \frac{\nu}{2 + \nu - B}$$

Donc

$$\frac{EB}{\nu} x = \int_0^y \sum_1^\infty P_n \sin n\omega \, dy$$

$$= -\frac{l}{\pi} \left[\sum_1^\infty \frac{P_n}{n} \cos n\omega - \sum_1^\infty \frac{P_n}{n} \right]$$

L'on obtient finalement :

$$\frac{\pi^3 EB}{\lambda}\,\frac{x}{l} = 4\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\,\omega}{(2m+1)^3} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\right\}$$

On trouvera planches 24 et 25 la forme du grillage déduite de l'application de cette relation dans le cas d'un développement de Fourier de 20 termes.

L'application aux cas concrets à envisager conduit aux développements suivants :

On pose :

$$x - x_o = \int_o^y tg\,\theta\, dy$$

et

$$X = \frac{\pi^3}{\lambda}\, EB\, \frac{x}{l}$$

D'où :

$$x = \frac{\lambda X L}{\pi^3 EB} = \frac{\lambda X L}{\pi^3 B}\left(\frac{2 + K\cos^2\theta - B}{K\cos^2\theta}\right)$$

$$= \frac{\lambda X L}{\pi^3 BK}\left[K + \frac{2-B}{\cos^2\theta}\right] = K\left[K + \frac{2-B}{\cos^2\theta}\right]$$

$$\frac{dx}{dy} = tg\,\theta \qquad \text{où} \quad K = \frac{\lambda X L}{\pi^3 BK}$$

De plus :

$$\frac{dx}{dy} = K(2-B)\left[-2\cos^{-3}\theta\,(-\sin\theta)\right]\frac{d\theta}{dy}$$

$$= 2K(2-B)\,\frac{tg\,\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dy}$$

Donc :

$$tg\,\theta = 2K(2-B)\,\frac{tg\,\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dy}$$

or $$K\,2\,(2-B)\,\frac{d\theta}{dy} = \cos^2\theta$$

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dy}{2(2-B)K}$$

or $$d(tg\,\theta) = \frac{dy}{2(2-B)K}$$

$$d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{dy}{2(2-B)K}$$

$$\frac{dx}{dy} = \int_0^y \frac{dy}{2(2-B)K}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2(2-B)K} + C$$

et finalement :

$$x = \frac{y^2}{4(2-B)K} + C_1 y + C_2$$

Pour $y = 0$, $x = 0$

Pour $y = L$, $x = x_0$

Donc $C_2 = 0$ et :

$$x_o = \frac{L^2}{4(2-B)K} + C_1 L$$

$$C_1 = \left[x_o - \frac{L^2}{4K(2-B)} \right] L$$

$$= \left[\frac{x_o}{L} - \frac{L}{4(2-B)K} \right]$$

Ainsi a-t-on :

$$x = \frac{y^2}{4(2-B)K} + \left(\frac{x_o}{L} - \frac{L}{4(2-B)K} \right) y$$

Substituant la valeur de K, il vient :

$$x = \frac{y^2}{4(2-B)} \left[\frac{\pi^3 BK}{\lambda X L} \right] + \left[\frac{x_o}{L} - \frac{L \pi^3 BK}{4(2-B)\lambda X L} \right] y$$

$$= \frac{\pi^3 BK}{4(2-B)\lambda X} \frac{y^2}{L} + \left[\frac{x_o}{L} - \frac{\pi^3 BK}{4(2-B)\lambda X} \right] y$$

$$= \left(\frac{\pi^3 BK}{4(2-B)\lambda} \right) \left(\frac{y^2 - Ly}{X} \right) + \frac{x_o}{L} y$$

Par application de la théorie précédente, on a mis en oeuvre un grillage de 12 mailles/cm, fil d = 0,3 mm, soumis à une vitesse de référence de 30 m/s.

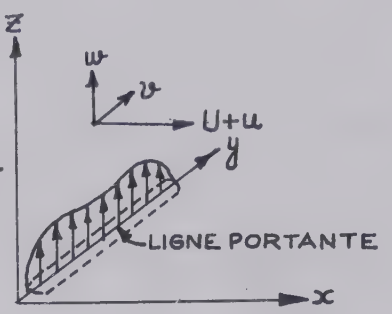
La forme du grillage et la distribution de vitesse sont décrits par les diagrammes des planches 25 et 21 . De petites modifications ont permis l'obtention d'un champ de vitesse à gradient plus uniforme ainsi que l'indique la planche 24 .

ANNEXE 4

La théorie de la ligne portante pour une aile en écoulement non uniforme (KARMAN TSIEN)

Dans cet article, les auteurs ont étudié l'écoulement autour d'une aile à faible incidence attaquée par un vent à l'infini amont non uniforme.

$Oxyz$ est le repère cartésien, l'écoulement est dirigé suivant $\vec{Ox}$ et $\vec{Oy}$ coïncide à la ligne portante ; p représente la pression, ρ la densité et v_1, v_2, v_3 sont les composantes de la vitesse. Le fluide est supposé parfait et incompressible. Les équations dynamiques pour l'écoulement stationnaire s'écrivent :



$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (1)$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (2)$$

$$v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (3)$$

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

Pour le problème d'une aile à faible incidence les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$v_1 = U + u \quad (5), \qquad v_2 = v \quad (6), \qquad v_3 = w \quad (7)$$

sont les composantes de la vitesse de perturbation et sont petites par rapport à $\vec{U}$. $\vec{U}$ est une fonction de y et z. En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 les équations se résuisent à :

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (8)$$

$$U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (9)$$

$$U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (10)$$

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (11)$$

Dérivant les équations (8), (9) et (10) par rapport à x, y, z

.../...

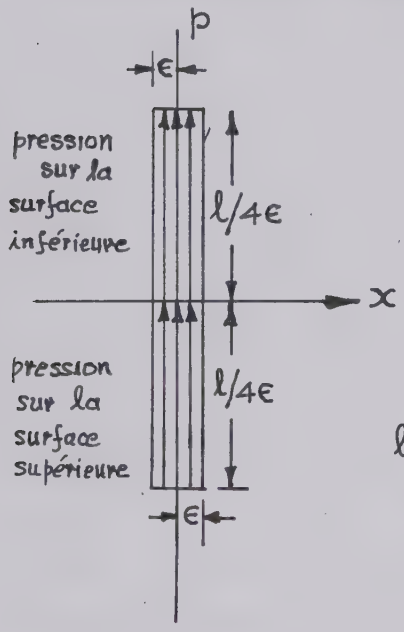
et en sommant il vient :

$$\frac{1}{U^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0 \qquad (12)$$

Avec une des conditions limites à satisfaire par :

$$p = 0, \text{ pour } |x| \to \infty \ , \ |y| \to \infty \ , |z| \to \infty \qquad (13)$$

La force de portance est représentée par une succion d'extrados, une surpression d'intrados d'égale importance.



D'où pour la pression :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} p\,dx = -\frac{1}{2}\,l(y) \ , \text{ pour } z = +0 \qquad (14)$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} p\,dx = \frac{1}{2}\,l(y) \ , \text{ pour } z = -0 \qquad (15)$$

$l(y)$ est la portance par unité de longueur de ligne portante en y.

Par symétrie $p = 0$ pour $z = 0$ et $|x| > \epsilon$.

Le théorème de l'intégrale de FOURIER, peut servir à la solution à partir de la forme $P(y,z,\lambda)\cos\lambda x$ (voir 21) avec

$$p = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\lambda x\, P(y,z,\lambda)\, d\lambda$$

L'équation que doit alors satisfaire P est (P indépendant de x)

$$U^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial P}{\partial y}\right) + U^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial P}{\partial z}\right) - \lambda^2 P = 0 \qquad (17)$$

Pour une détermination unique de P, imposons : (18) $P = 0$ pour $\frac{|x|}{|z|} \Rightarrow \infty$

(19) $P = -\frac{1}{2}\ell(y)$ pour $z = +0$, (20) $P = \frac{1}{2}\ell(y)$ pour $z = -0$

La solution reprise pour p est : $$p = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x \; P(y,z,\lambda)\, d\lambda \qquad (21)$$

Substituant (21) dans (9) et (10)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho U}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho U \pi}\int_0^\infty \cos\lambda x \frac{\partial P}{\partial z} d\lambda$$

d'où

$$v(x,y,z) = v(0,y,z) - \frac{1}{\rho U}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y} P(y,z,\lambda)\, d\lambda \qquad (22)$$

puisque

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}(\sin\lambda x) = \cos\lambda x$$

Id.

$$w(x,y,z) = w(0,y,z) - \frac{1}{\rho U}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} P(y,z,\lambda)\, d\lambda \qquad (23)$$

Les $\int$'s sont fonctions impaires de x ; loué devant et derrière la ligne portante, on aura les relations suivantes concernant les vitesses :

$$\frac{1}{2}\{v(-\infty,y,z) + v(\infty,y,z)\} = v(0,y,z)$$

$$\frac{1}{2}\{w(-\infty,y,z) + w(\infty,y,z)\} = w(0,y,z)$$

avec, puisque les vitesses induites à l'∞ sont $= 0$:

$$v(0,y,z) = \frac{1}{2}\, v(\infty,y,z) \qquad (24)$$

$$w(0,y,z) = \frac{1}{2}\, w(\infty,y,z) \qquad (25)$$

ce qui est en accord avec la théorie classique de l'induction des tourbillons libres d'une aile :

Par (8), en intégrand vis-à-vis de x :

$$u = -\frac{1}{\rho U} p - \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial y}\int_{-\infty}^{x} v\,dx - \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial z}\int_{-\infty}^{x} w\,dx \qquad (26)$$

$p \to 0$, v et $w \longrightarrow$ quantités finies quand $x \to \infty$

Ainsi u s'accroît ∞ ent. qd $x \to \infty$ ce qui est contraire à l'hypothèse des faibles perturbations : on passera outre car la valeur apparente de $u \to \infty$ ent., est due au flux induit à ce qui ne nous intéresse plus.

3. - <u>CONDITION SILLAGE ELOIGNE</u>

(24) et (25) conduisent à une simplification pour les points du sillage éloigné (plan de Trefftz).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{soit} & v_0 = v(0,y,z)\ , \quad w_0 = w(0,y,z) \\ & v_1 = v(\infty,y,z)\ , \quad w_1 = w(\infty,y,z) \end{array}\right\} \qquad (27)$$

alors

$$v_0 = \frac{1}{2} v_1 \ , \qquad w_0 = \frac{1}{2} w_1$$

(22) et (23) fournissent

$$v_1 = -\frac{1}{\rho U} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\ \frac{\partial}{\partial y} P(y,z,\lambda)\, d\lambda$$

$$w_1 = -\frac{1}{\rho U} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\ \frac{\partial}{\partial z} P(y,z,\lambda)\, d\lambda$$

Si P est fonction régulière de λ ,

$$P(y,z,\lambda) = P(y,z,0) + \lambda\left[\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0^+} - - - - -$$

$$v_1 = -\frac{1}{\rho U} \lim_{z\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ P(y,z,0) + \frac{t}{x} \left[\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} + \text{----} \right\} dt$$

$$w_1 = -\frac{1}{\rho U} \lim_{z\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ P(y,z,0) + \frac{t}{x} \left[\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} + \text{------} \right\} dt$$

A la limite, seul est significatif le 1er terme et avec

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = 1$$

on obtient :

$$v_1 = -\frac{1}{\rho U} \frac{\partial}{\partial y} P(y,z,0) \qquad (28)$$

$$w_1 = -\frac{1}{\rho U} \frac{\partial}{\partial z} P(y,z,0) \qquad (29)$$

Introduisant la fonction potentielle ϕ par

$$\phi(y,z) = -P(y,z,0) \qquad (30)$$

le problème se formule comme une équation diff. issue de (17) en posant $\lambda = 0$, soit

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0 \qquad (31)$$

Aux limites on doit avoir .

$$\phi = 0 \quad \text{pour} \quad |y| \to \infty \ , \ |z| \to \infty \qquad (32)$$

$$\phi = \ell(y)/2 \quad \text{pour} \quad z = +0 \qquad (33)$$

$$\phi = -\ell(y)/2 \quad \text{pour} \quad z = -0 \qquad (34)$$

avec

$$v_1 = \frac{1}{\rho U}\frac{\partial \phi}{\partial y} \ , \qquad (35) \qquad w_1 = \frac{1}{\rho U}\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (36)$$

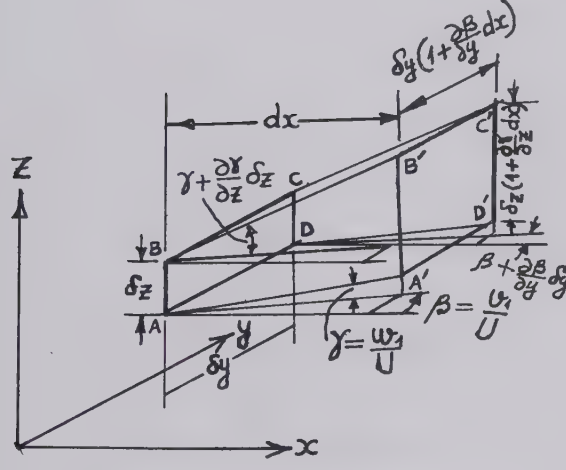
Portons dans (31) :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_1}{U}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w_1}{U}\right) = 0 \qquad (37)$$

Si v_1 , w_1 , sont quantités petites, $\frac{v_1}{U}$, $\frac{w_1}{U}$ sont les angles d'inclinaison β et γ de lignes de courant sur les plans zx et yx.

Considérons des plans $\parallel$, $\perp$ à l'axe des x , séparés de dx . Si l'épaisseur du tube de courant dans la section x est δy , à la section $x+dx$ elle sera

$$\delta y \left\{ 1 + dx \cdot \partial\beta / \partial y \right\}$$



Si la hauteur du tube de courant en x est δz en $x+dx$, elle sera.

$$\delta z \left\{ 1 + dx \cdot \partial\gamma / \partial z \right\}$$

L'accroissement de section sera approximativement :

$$\delta y \, \delta z \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right\} dx .$$

Dans le plan de Trefftz, le champ débitant peut être considéré comme soumis à des conditions uniformes :

La pression est **cte**.dans la direction x.
La vitesse est **cte**. donc ainsi la section, d'où

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

qui est **(37)**

(37) est donc l'équ. de continuité.

NOTA : Véritable condition de continuité :

soient $\beta = \frac{v}{U}$, $\gamma = \frac{w}{U}$

et $A(x,y,z)$, $B(x,y,z+dz)$, $C(x,y+dy,z+dz)$,
$D(x,y+dy,z)$

enfin $A'(x+dx\,,\ y+\beta dx\,,\ z+\gamma dz)$, $B'(x+dx,\ y+\beta dy, z+dz+(\gamma+\frac{\partial\gamma}{\partial z}dz)dx)$
$C'(x+dx\,,\ y+dy+\beta dx+\frac{\partial\beta}{\partial y}dy dx,\ z+dz+\gamma dx+\frac{\partial\gamma}{\partial z}dz dx)$
$D'(x+dx\,,\ y+dy+\beta dx+\frac{\partial\beta}{\partial y}dy dx,\ z+\gamma dx)$

En A, la vit. est U . En A' elle est $U + \frac{\partial U}{\partial y}\beta\,dx$

Par conservation du débit :

$$U.AB.AD = \left(U + \frac{\partial U}{\partial y}\beta dx\right) A'B'.A'D'$$

c'est-à-dire

$$U\,dy\,dz = \left(U + \frac{\partial U}{\partial y}\beta dx\right) dz\left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial z}dx\right) dy\left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial y}dx\right)$$

ou

$$0 = \frac{\partial U}{\partial y}\beta dx + U\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dx$$

ou enfin : $\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\beta}{U}\frac{\partial U}{\partial y} = 0$. S'assimile à $\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$

$\emptyset$ peut être éliminé entre (35) et (36) d'où l'on tire :

$$\frac{\partial}{\partial z}(U v_1) - \frac{\partial}{\partial y}(U w_1) = 0 \qquad (38)$$

C'est l'équation de la circulation modifiée, valable pour toutes les valeurs de x sous les approximations admises. Puisque U est fonction de y, z seuls, (9) et (10) prennent la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x}(Uv) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}(Uw) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Différentiant la première équ. par rapport à z et la deuxième par rapport à y , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(Uv) - \frac{\partial}{\partial y}(Uw)\right\} = 0$$

Ainsi : $\left\{\frac{\partial}{\partial z}(Uv) - \frac{\partial}{\partial y}(Uw)\right\}$ = Fest fonction de y et z seuls.

Pour les points éloignés du sillage, $x = -\infty$, v et w s'évanouissent. La fonction de y et z, $F \equiv 0$.
Ainsi pour toutes valeurs de x,

$$\frac{\partial}{\partial z}(Uv) - \frac{\partial}{\partial y}(Uw) = 0 \qquad (39)$$

Notons que les équations : 37, 38, 39, ont été obtenues sans aucune référence avec la ligne portante et sont valables pour le cas général. Toutefois, la détermination complète de v_1, w_1, requiert la connaissance des relations liant les vitesses induites à la portance, c'est-à-dire du type de distribution de celle-ci. Ici, il est défini par les équations 33 et 34 (en ϕ).

L'équation (37) peut être satisfaire $\equiv$ ent en introduisant la fonction de ψ telle que

$$v_1 = U\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad , \quad w_1 = -U\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (40)$$

(38) donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U^2\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U^2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0 \qquad (41)$$

(31) et (41) se réduisent à des Laplaciens si U = cte.

(avec alors $\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0$.)

Ce qui était évident à priori.

```
      SUBROUTINE MCINV(S,SIG,H,T,EPS1,EPS2,KPDS,KVER,KITER,N,M)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION S(50,15),SIG(15,50),T(50,50),H(50),TAU(50),DEL(50)
C           SP DE MOINDRES CARRES ET D INVERSION MATRICIELLE
C     METHODE D ORTHOGONALISATION ITEREE
C     S = MATRICE DONNEE (N LIGNES M COLONNES N SUPERIEUR OU EGAL A M)
C     H = COLONNE DE PONDERATION (=1 SI KPDS=0)
C     EPS1 = DIVISEUR MINI ACCEPTABLE (COLONNES NON INDEPENDANTES)
C     EPS2 = RESIDU MINI DE LA MATRICE PRODUIT
C     KITER = CODE RELATIF A L ITERATION (1 OU 2)
C     KVER = CODE DE VERIFICATION
C     KVER = 1    CORRECT
C     KVER = 2    UN RESIDU AU MOINS EST SUPERIEUR A EPS2
C     KVER =3     DIVISEJR MINI INFERIEUR A EPS1 (ABANDON)
C     T = MATRICE TRIANGULAIRE PUIS MATRICE RESIDU
C     SIG = MATRICE RESJLTAT (TELLE QUE SI Z=S*X ALORS X=SIG*Z)
      IF (KPDS)145,139,145
  139 DO 142 I=1,N
  142 H(I)=1.
  145 KITER=1
      KVER=1
C     DEBUT DECOMPOSITION
      DO 432 J=1,M
      TPR=0
      DO 217 I=1,N
      SIG(J,I)=H(I)*S(I,J)
  217 TPR=TPR+SIG(J,I)**2
      DEL(J)=DSQRT(TPR)
      D=DEL(J)
      IF (D-EPS1)222,222,225
  222 KVER=3
      RETURN
  225 DO 226 I=1,N
  226 SIG(J,I)=SIG(J,I)/D
      T(J,J)=1.
      IF (J-1)432,432,235
  235 NIT=0
      J1=J-1
      DO 244 L=1,J1
  244 T(L,J)=0
  302 KODE=1
      DO 329 L=1,J1
      TAU(L)=0
      DO 314 I=1,N
  314 TAU(L)=TAU(L)+SIG(L,I)*SIG(J,I)
      T(L,J)=T(L,J)+TAU(L)
      IF ( DABS(T(L,J))-EPS1)329,329,323
  323 IF (DABS(TAU(L)/T(J,J))-1.E-8)329,329,326
  326 KODE=2
  329 CONTINUE
```

```
      TPR=0
      DO 344 I=1,N
      DO 341 K=1,J1
  341 SIG(J,I)=SIG(J,I)-SIG(K,I)*TAU(K)
  344 TPR=TPR+SIG(J,I)**2
      T(J,J)=DSQRT(TPR)
      IF (T(J,J)-EPS1)405,405,411
  405 KVER=3
      RETURN
  411 NIT=NIT+1
      IF (NIT-10)423,417,417
  417 KITER=2
      GO TO 426
  423 GO TO (426,302),KODE
  426 DO 429 I=1,N
  429 SIG(J,I)=SIG(J,I)/T(J,J)
  432 CONTINUE
C     DEBUT REMONTEE
      DO 441 I=1,N
  441 SIG(M,I)=SIG(M,I)/T(M,M)
      M1=M-1
      DO 523 L=1,M1
      DO 523 I=1,N
      KD=M-L+1
      ML=M-L
      DO 517 K=KD,M
  517 SIG(ML,I)=SIG(ML,I)-T(ML,K)*SIG(K,I)
      SIG(ML,I)=SIG(ML,I)/T(ML,ML)
  523 CONTINUE
      DO 532 I=1,N
      DO 532 J=1,M
  532 SIG(J,I)=SIG(J,I)*H(I)/DEL(J)
C     VERIFICATION (MATRICE PRODUIT)
      DO 620 I=1,M
      DO 620 J=1,M
      T(I,J)=0
      DO 550 K=1,N
  550 T(I,J)=T(I,J)+SIG(I,K)*S(K,J)
      IF (I-J)611,605,611
  605 EPS=DABS(T(I,J)-1.)
      GO TO 614
  611 EPS=DABS(T(I,J))
  614 IF (EPS-EPS2)620,620,617
  617 KVER=2
  620 CONTINUE
      RETURN
      END
C     ENTRE PARDIS F=0,ENVERGURE FINIE F=1, PRANDTL G=0,PRDT MODIFIE G=1
      REAL*8 A,T,Q,TTRI,H,SM,EPS1,EPS2
      DIMENSION T(50,15),Q(15,50),TTRI(50,50),H(50)
```

```
      DIMENSION CT(50,50),ST(50,50),SM(50),TETA(50,50),
     1A(40),AB(40),Y(50),ZIEF(50),DVV(20),CPE(20),VV(20),CPI(20),XL(20)
    1 FORMAT(1H1,50X,'METHODE DE PRANDTL',///)
    2 FORMAT(1H1,50X,'PRANDTL MODIFIE',///)
    3 FORMAT(1H ,5X,'A(',I2,')=',E15.8)
    4 FORMAT(8E16.8)
    5 FORMAT(1H1,'      2Y/B            V M/S           IG DEG
     1GAMMA            N M/S          I EFF DEG      CZ LOCAL      ',///)
    6 FORMAT(1H1,50X,'REPARTITION DES KP'//25X,'2Y/B=',F9.5,40X,' INCIDE
     1NCE EFFECTIVE=',E12.5///35X,'X/L',30X,'EXTRADOS',30X,'INTRADOS'//)
    7 FORMAT(6E12.8)
    8 FORMAT(10I2)
    9 FORMAT(3E12.8)
   11 FORMAT(1H ,25X,E16.8,20X,E16.8,20X,E16.8)
      READ(5,8) N,M
      READ(5,9) (XL(I),VV(I),DVV(I),I=1,18)
      READ(5,7) (Y(I),I=1,20)
 3000 READ(5,7) PL,B,A0,A1,A2,V0,V1,V2,DY,F
      IF(PL) 1000,6000,1000
 1000 G=0
 2000 EPS1=+1.D-06
      EPS2=+1.D-06
      KPDS=0
      PI=4.*ATAN(1.)
      PLB2=PL*PL/(B*B)
      PILB=PI*PL/(2.*B)
      DTETA=PI/(M+1)
      PMTTA=PI-DTETA
      IF(G) 310,320,310
  320 WRITE(6,1)
      GO TO 330
  310 WRITE(6,2)
  330 ZIN1=A0+A1*COS(DTETA)+A2*COS(3.*DTETA)
      VTS1=V0+V1*COS(DTETA)+V2*COS(3.*DTETA)
      VIN1=ZIN1*VTS1
      VIN1=ABS(VIN1)
      ZIN2=A0+A1*COS(PMTTA)+A2*COS(3.*PMTTA)
      VTS2=V0+V1*COS(PMTTA)+V2*COS(3.*PMTTA)
      VIN2=ZIN2*VTS2
      VIN2=ABS(VIN2)
      VIN=VIN1-VIN2
      IF(VIN) 10,20,10
   10 DTETA=PI/(M+1)
      DO 100 I=1,M
      TETA(I,1)=I*DTETA
      CT(I,1)=COS(TETA(I,1))
      ST(I,1)=SIN(TETA(I,1))
      CT2=CT(I,1)*CT(I,1)
      ST2=ST(I,1)*ST(I,1)
      CT3=CT2*CT(I,1)
```

```
      ST3=ST2*ST(I,1)
      T(I,1)=ST2*ST2+PILB*ST3-G*PLB2*(ST2+CT2)
      DO 110 J=2,N
      CT(I,J)=CT(I,J-1)*CT(I,1)-ST(I,J-1)*ST(I,1)
      ST(I,J)=ST(I,J-1)*CT(I,1)+CT(I,J-1)*ST(I,1)
      C1=ST(I,J)*ST2*(ST(I,1)+PILB*J)
      C2=J*ST(I,J)*ST(I,1)+CT(I,J)*CT(I,1)
      C2=J*G*PLB2*C2
      T(I,J)=C1-C2
      IF(J-N+2) 110,12,110
   12 IF(F) 110,13,110
  110 CONTINUE
      GO TO 14
   13 TANT2=SIN(TETA(I,1)/2.)/COS(TETA(I,1)/2.)
      T(I,N-1)=ST3*(CT(I,1)-PL*ALOG(TANT2)/(2.*B))
      T(I,N)=ST3
   14 ZIG=A0+A1*CT(I,1)+A2*CT(I,3)
      VTS=V0+V1*CT(I,1)+V2*CT(I,3)
      SM(I)=PILB*ZIG*(VTS/V0)*ST3*PI/180.
  100 CONTINUE
      GO TO 30
   20 DTETA=PI/(2.*(M+1))
      NS=2*N
      DO 120 I=1,M
      TETA(I,1)=I*DTETA
      CT(I,1)=COS(TETA(I,1))
      ST(I,1)=SIN(TETA(I,1))
      CT2=CT(I,1)*CT(I,1)
      ST2=ST(I,1)*ST(I,1)
      CT(I,2)=CT2-ST2
      ST(I,2)=2*ST(I,1)*CT(I,1)
      T(I,1)=ST2*(ST(I,2)*ST(I,1)+2.*PILB*ST(I,2))
      T(I,1)=T(I,1)-G*P_B2*2.*(2.*ST(I,2)*ST(I,1)+CT(I,2)*CT(I,1))
      DO 130 JS=4,NS,2
      J=JS/2
      CT(I,JS)=CT(I,JS-2)*CT(I,2)-ST(I,JS-2)*ST(I,2)
      ST(I,JS)=ST(I,JS-2)*CT(I,2)+CT(I,JS-2)*ST(I,2)
      C1=ST(I,JS)*ST2*(ST(I,1)+JS*PILB)
      C2=JS*ST(I,JS)*ST(I,1)+CT(I,JS)*CT(I,1)
      C2=G*PLB2*JS*C2
      T(I,J)=C1-C2
  130 CONTINUE
      VTS=V0+V1*CT(I,1)+V2*COS(3.*DTETA*I)
      ZIG=A0+A1*CT(I,1)+A2*COS(3.*DTETA*I)
      SM(I)=PILB*ZIG*(VTS/V0)*ST2*ST(I,1)*PI/180.
  120 CONTINUE
   30 CALL MCINV(T,Q,H,TTRI,EPS1,EPS2,KPDS,KVER,KITER,M,N)
      DO 140 I=1,N
      A(I)=0
      DO 140 J=1,M
```

```
      A(I)=A(I)+Q(I,J)*SM(J)
  140 CONTINUE
      WRITE(6,8) KVER,KITER
      IF(VIN) 50,40,50
   40 NS=2*N
      DO 180 JS=2,NS,2
      J=JS/2
      AB(JS)=A(J)
      WRITE(6,3) JS,AB(JS)
  180 CONTINUE
      GO TO 60
   50 DO 190 I=1,N
      AB(I)=A(I)
      WRITE(6,3) I,AB(I)
  190 CONTINUE
   60 WRITE(6,5)
      NP=2/DY
      DO 150 I=1,NP
      IF(Y(I)) 240,250,260
  260 YY=SQRT(1.-Y(I)*Y(I))
      Z=YY/Y(I)
      TATA=PI-ATAN(Z)
      GO TO 270
  250 TATA=PI/2.
      GO TO 270
  240 YY=SQRT(1.-Y(I)*Y(I))
      Z=YY/Y(I)
      TATA=-ATAN(Z)
  270 CONTINUE
      GAMMA=0.
      VTSW=0.
      IF(VIN)161,171,161
  161 CONTINUE
      DO 160 J=1,N
      GAMMA=GAMMA+2.*VO*B*AB(J)*SIN(J*TATA)
      VTSW=VTSW+J*VO*AB(J)*SIN(J*TATA)/SIN(TATA)
      IF(J-N+2) 160,75,160
   75 IF(F) 160,76,160
  160 CONTINUE
      GO TO 80
   76 GAMMA=GAMMA+2.*VO*B*(AB(N-1)*COS(TATA)+AB(N))
      TANT2=SIN(TATA/2)/COS(TATA/2)
      VTSW=VTSW-AB(N-1)*VO/PI*ALOG(TANT2)
      GO TO 80
  171 CONTINUE
      DO 170 JS=2,NS,2
      GAMMA=GAMMA+2*VO*3*AB(JS)*SIN(JS*TATA)
      VTSW=VTSW+JS*VO*AB(JS)*SIN(JS*TATA)/SIN(TATA)
  170 CONTINUE
   80 VTS=VO+V1*COS(TATA)+V2*COS(3.*TATA)
```

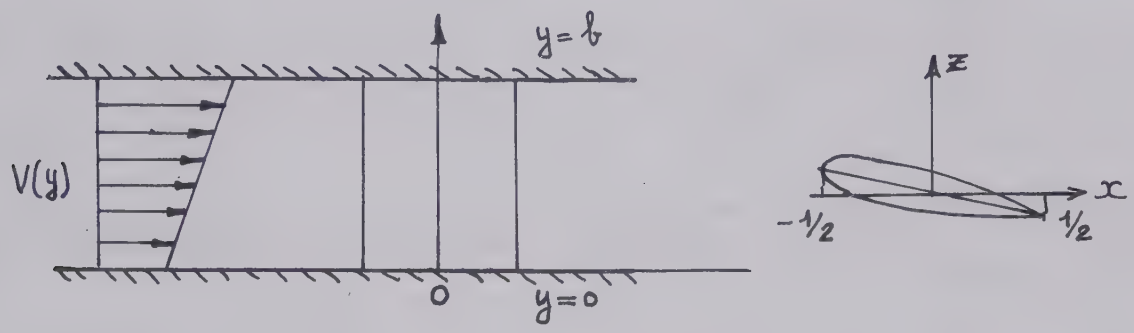
```
      ZIND=VTSW/VTS*180./PI
      ZIG=A0+A1*COS(TATA)+A2*COS(3.*TATA)
      ZIEF(I)= GAMMA/(PI*VTS*PL)*180/PI
      CZY=2.*GAMMA/(PL*VTS)
      WRITE(6,4) Y(I),VTS,ZIG,GAMMA,VTSW,ZIEF(I),CZY
  150 CONTINUE
      DO 200 J=1,NP
      WRITE(6,6) Y(J),ZIEF(J)
      DO 210 I=1,18
      DVV1=ZIEF(J)*DVV(I)*PI/180.*2.*PI
      CPE(I)=1.-(VV(I)+DVV1)**2
      CPI(I)=1.-(VV(I)-DVV1)**2
      WRITE(6,11) XL(I),CPE(I),CPI(I)
  210 CONTINUE
  200 CONTINUE
      G=G+1
      IF(G-1) 3000,2000,3000
 6000 STOP
      END
```

NOMBRE DE CARTES LUES = 269

ANNEXE 6

THEORIE D'UNE AILE MINCE DANS UN ECOULEMENT NON-UNIFORME SELON HONDA

Dans cette annexe, on exposera la théorie de HONDA appliquée au cas d'une aile du profil N.A.C.A.0012 dans un champ de vitesse linéaire . Les notations et les numérations d'équations sont les mêmes que celles de HONDA sauf pour l'envergure b au lieu de .



Les composantes u,v,w de la vitesse de perturbation sont supposées petites en regard de V. V est une fonction de y. les équations de mouvement et de continuité deviennent :

$$V\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{dV}{dy} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$V\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

$$V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

avec les conditions limites :

$$p = 0 \quad \text{pour} \quad (x^2+z^2) \longrightarrow \infty \qquad (5)$$

$$\partial p/\partial y = 0 \quad \text{a} \quad y = 0, b \qquad (6)$$

et la condition de glissement pour une aile mince

$$\left(\frac{w}{V}\right)_{z=0} = f(x) \qquad \left(-1/2<x<\frac{1}{2}\,,\ 0<y<b\right) \qquad (7)$$

En éliminant u,v,w, des équations (1) à (4) on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V^2}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \qquad (8)$$

HONDA emploie la méthode de séparation de coerdonnées pour résoudre cette equation.

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{V^2}\frac{dY}{dy}\right) + k^2 \frac{Y}{V} = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - k^2 P = 0 \qquad (11)$$

Où k est une constante de séparation.

La solution générale s'écrit alors :

$$p/\rho = \sum_k F(k)\, Y(y;k)\, P(x,z;k) \qquad (12)$$

Avec la condition de l'écoulement non-perturbé à l'infini, les équations (3) et (12) donnent :

$$\frac{w}{V} = \frac{1}{V^2} \sum_k F(k)\, Y(y;k) \left\{ -\int_{-\infty}^{x} \left[\frac{\partial}{\partial z} P(x,z;k)\right] dx \right\} \qquad (13)$$

et les conditions limites prennent la forme suivante :

$$P(x,z,k) = 0 \quad \text{à} \quad (x^2+z^2) \to \infty \qquad (14)$$

$$\frac{d}{dy}\left(Y(y;k)\right) = 0 \quad \text{à} \quad y = 0, b \qquad (15)$$

et

$$\frac{1}{V^2} \Sigma F(k)\, Y(y;k) = 1 \quad (0 < y < b) \qquad (16)$$

$$\left[-\int_{-\infty}^{x} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} P(x,z;k) \right\} dx \right]_{z=0} = f(x) \qquad (17)$$

.../...

LA FONCTION Y(x,z,k)

La resolution de l'équation (10) avec les conditions limites (15) est un problème du type STURM-LIOUVILLE. Il existe un nombre infini de valeurs propres k et a chacune correspond une fonction propre. En normalisant ces fonctions, on obtient:

$$\frac{1}{b}\int_0^b \frac{Y_n^2}{V^2}\,dy = 1 \qquad (19)$$

F(k) dans l'equation (12) est obtenu par l'equation (16).

$$F(0) = Y(y,0) = \left[\frac{1}{b}\int_0^b \frac{dy}{V^2}\right]^{-1/2}, \quad F(k) = \frac{1}{b}\int_0^b Y(y,k)\,dy \qquad (20)$$

Considerons un champ de vitesse donne par l'equation :

$$V = V_0 + \frac{V_1 - V_0}{b}\,y$$

Où V0 et V1 sont les vitesses à y=0 et y=b.

L'équation (10) peut s'écrire :

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{Y}{V}\right) + \left\{k^2 - 2\left(\frac{V_1 - V_0}{bV}\right)^2\right\}\left(\frac{Y}{V}\right) = 0$$

et la fonction Y est donnée par :

$$Y = V\left\{C_1 \cos ky + C_2 \sin ky\right\}$$

C1 etC2 sont des constantes qui peuvent être déterminees par la condition de normalisation (19) et la condition limite (15).

Y prend la forme :

$$Y = \left\{\frac{1}{2}\left[1 - \frac{V_1 - V_0}{V_0 b^2 k^2} + \left(\frac{V_1 - V_0}{V_0 bk}\right)^2\right] + \frac{\sin 2kb}{4kb}\left[1 - \left(\frac{V_1 - V_0}{V_0 bk}\right)^2\right] + \frac{V_1 - V_0}{2b^2k^2}\cos 2kb\right\}^{-1/2} \cdot V \cdot \left\{\cos ky - \frac{V_1 - V_0}{bkV_0}\sin ky\right\}$$

et F(k) peut être calculé par la relation:

$$F(0) = \sqrt{V_0 V_1}$$

$$F(k) = \frac{\frac{V_1 - V_0}{b^2k^2}\left[\left(1 + \frac{V_1}{V_0}\right)\cos kb + \left(\frac{V_1 kb}{V_1 - V_0} - \frac{V_1 - V_0}{V_0 kb}\right)\sin kb - 2\right]}{\left[\frac{1}{2}\left[1 - \frac{V_1 - V_0}{V_0 k^2 b^2} + \left(\frac{V_1 - V_0}{V_0 bk}\right)^2\right] + \frac{\sin 2bk}{4kb}\left[1 - \left(\frac{V_1 - V_0}{V_0 bk}\right)^2\right] + \frac{V_1 - V_0}{2b^2k^2}\cos 2kb\right]^{1/2}}$$

.../...

Pour un champ de vitesse donné par V= 12,5 + 14 y , les calculs ont été faits pour les dix premiers termes correspondant à une valeur croissante de k.

LA FONCTION P(x,z,k)

Pour le cas présent (Profil du type N.A.C.A.0012), la forme du profil donnée par z en fonction de x est représentée par la relation suivante;

$$z = 0,6\left\{0,2969\,(1/2+x)^{\frac{1}{2}} - 0,1260\,(1/2+x) - 0,3516\,(1/2+x)^2 + 0,2843\,(1/2+x)^3 - 0,1015\,(1/2+x)^4\right\}$$

Soit x=0,5 cosθ , z devient :

$$z = 0,6\left\{0,0883 - 0,0525\cos\theta - 0,0454\cos^2\theta + 0,0234\cos^3\theta - 0,0145\cos^4\theta\right\}$$

$$= 0,0365 - 0,0210\cos\theta - 0,0179\cos 2\theta + 0,0035\cos 3\theta - 0,0011\cos 4\theta \quad = \left(a_0 + \sum_{n=1}^{4} a_n \cos n\theta\right)$$

Ce profil est situé à l'incidence α relative à la vitesse V.

f(x) dans la relation (17) peut être écrite :

$$f(\theta) = \frac{dz}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = -\left[\sum_{n=1}^{4} n a_n \sin n\theta \Big/ (-0,5\sin\theta)\right] - \alpha$$

$$= -\frac{2}{\sin\theta}\left\{0,021\sin\theta + 0,0358\sin 2\theta - 0,0105\sin 3\theta + 0,0044\sin 4\theta\right\}$$

et on obtient une équation intégrale pour P(θ,k),

$$\frac{1}{1/2\sin\phi}\left\{\frac{1}{2}\alpha\sin\phi - \Sigma n a_n \sin n\phi\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(\phi,\theta)\,P(\theta,k)\,d\theta$$

$$h(\phi,\theta) = \frac{1}{2}\pi k + k\,\mathrm{Sgn}\,(\cos\phi - \cos\theta)\left\{K_1\left[\frac{1}{2}k\,|\cos\phi - \cos\theta|\right] + \int_0^{\frac{1}{2}k\,|\cos\phi\,.\,\cos\theta|} K_0(t)\,dt\right.$$

- - - (35)

.../...

HONDA obtient la fonction $h_0(\theta,k)$ comme la solution singulière de l'équation (35).

$$h_0(\theta,k) = 2\sin\theta\, f_1(\theta,q) + h_2(\theta,q) + \tfrac{1}{4}\pi k\,\sigma(q)\,h_1(\theta,q) \quad (54)$$

où $$\sigma(q) = \sum_{m=0}^{\infty} (\pi\gamma_{2m+1})\left[A_1^{(2m+1)}\right]^2 \quad , \quad q = \left(\tfrac{1}{4}k\right)^2 \quad (52)$$

$$\pi\gamma_m = \frac{Gekm(0,-q)}{Gek'm(0,-q)} \quad (41)$$

$$f_1(\theta,q) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\pi\gamma_{2m+1})\,A_1^{(2m+1)}\,A_{2j+1}^{(2m+1)}\right]\sin(2j+1)\theta \quad (50)$$

$$h_1(\theta,q) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\pi\gamma_{2m+1})A_1^{(2m+1)}\,A_{2j+1}^{(2m+1)}\right]\cos(2j+1)\theta$$

$$h_2(\theta,q) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+2)\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\pi\gamma_{2m+2})B_2^{(2m+2)}\,B_{2j+2}^{(2m+2)}\right]\cos(2j+2)\theta$$

(cf. Ref 5. appendice 2)

La solution finale de l'équation intégrale (35) devient :

$$P(\theta;k) = -K\,h_0(\theta,k) + \tfrac{1}{2}\alpha\,h_1(\theta,q) - \sum_{n=1}^{4} n\,a_n\,h_n(\theta,q) \quad (55)$$

La constante K est déterminée par la condition de JOUKOWSKI, (P(0,k)=0)

$$K(k) = \frac{\alpha}{2}\,\frac{h_1(0,q)}{h_0(0,k)} - \sum_{n=1}^{4} n\,a_n\,\frac{h_n(0,q)}{h_0(0,k)} \quad (56)$$

(cf. Ref.5. tabulation)

LA PORTANCE

On obtient le coefficient de la portance locale par l'intégration des pressions le long de la corde.

$$\ell(y) = 2\rho\sum_k F(k)\,Y(y,k)\left[\pi K(k)\,\sigma(q)\right] \quad (57)$$

$$C_{z\,local} = \ell(y)\,/\,\tfrac{1}{2}\rho V^2 \quad (58)$$

.../...

LA THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE SELON HONDA

HONDA pose $q=(\frac{1}{2}k)^2=0$ dans la relation (54) pour la pression P(θ,k) dans le cas d'un grand allongement.

$$P(\theta,k) = -\mathcal{K}\left(1+\frac{1}{4}\pi k\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\alpha\cos\theta - \sum_{n=1}^{4} n a_n \cos n\theta \qquad (70)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\pi k\mathcal{K} \qquad [P(0,k)=0] \qquad (72)$$

Pour le cas d'une plaque plane à l'incidence α, (57), devient:

$$\ell(y) = \rho\left\{\pi\alpha\sum_k F(k)Y(y;k) - \frac{1}{2}\pi\Sigma k F(k)Y(y;k)[\pi\mathcal{K}]\right\}$$
$$= \rho V^2\pi\left\{\alpha + \tfrac{1}{2}(w_\infty/V)_{z=0}\right\}$$

C'est la relation fondamentale dans la théorie de la ligne portante.

On peut obtenir les solutions par la ligne portante en posant

$$[\pi\mathcal{K}\sigma] = \tfrac{1}{2}\pi\alpha/(1+\tfrac{1}{4}\pi k) \qquad (74)$$

dans la relation (57).

REFERENCES

1 DURAND WF
Aerodynamic theory Vol. 2
Springer - Verlag Berlin (1934)

2 VON KARMAN T. et TSIEN H.S.
Lifting Line Theory for a wing in non-uniform flow
Quarterly of applied Mathematics - Vol. 3 n°1 (1945)

3 SQUIRE H.B. et WINTER K.G.
The secondary flow in a cascade of airfoils
in a non-uniform stream.
J. Aeronautical Sciences 18, 271 (1951)

4 LIGHTHILL M.J.
The fundamental solution for small steady
three dimensional disturbances to a two
dimensional parallel shear flow.
J. Fluid Mechanics 3 113 (1957)

5 HONDA M.
Theory of thin wings in a shear flow
Tohoku university, Institute of high speed mechanics (1959)

6 VAN DYKE.M.
Lifting Line Theory as a singular perturbation problem.
Stanford University SUDAER Report n°165 (1963)

7 JOHANSSAN B.
Lifting Line Theory for subsonic shear flow Aeronautical Research
Institute of Sweedan Report n°114 (1967).

.../...

8 VAYSSAIRE J.C.
Nouvelle méthode de calcul de correction des résultats d'essais en soufflerie basse-vitesse.
Extrait l'Aéronautique et l'Astronautique n° 15 et 16 (1968).

9 CAIUS JACOB
Introduction mathématique à la mécanique des fluides
PARIS Gauthier VILLARS 1959.

10 OWEN P.R. et ZIENKIEWICZ
Production of uniform shear flow in a wind tunnel
Journal of fluid Mech. 28 (1957).

11 Gould et Al
Wind tunnel tests on chimneys of circular cross section at high Reynolds Numbers.

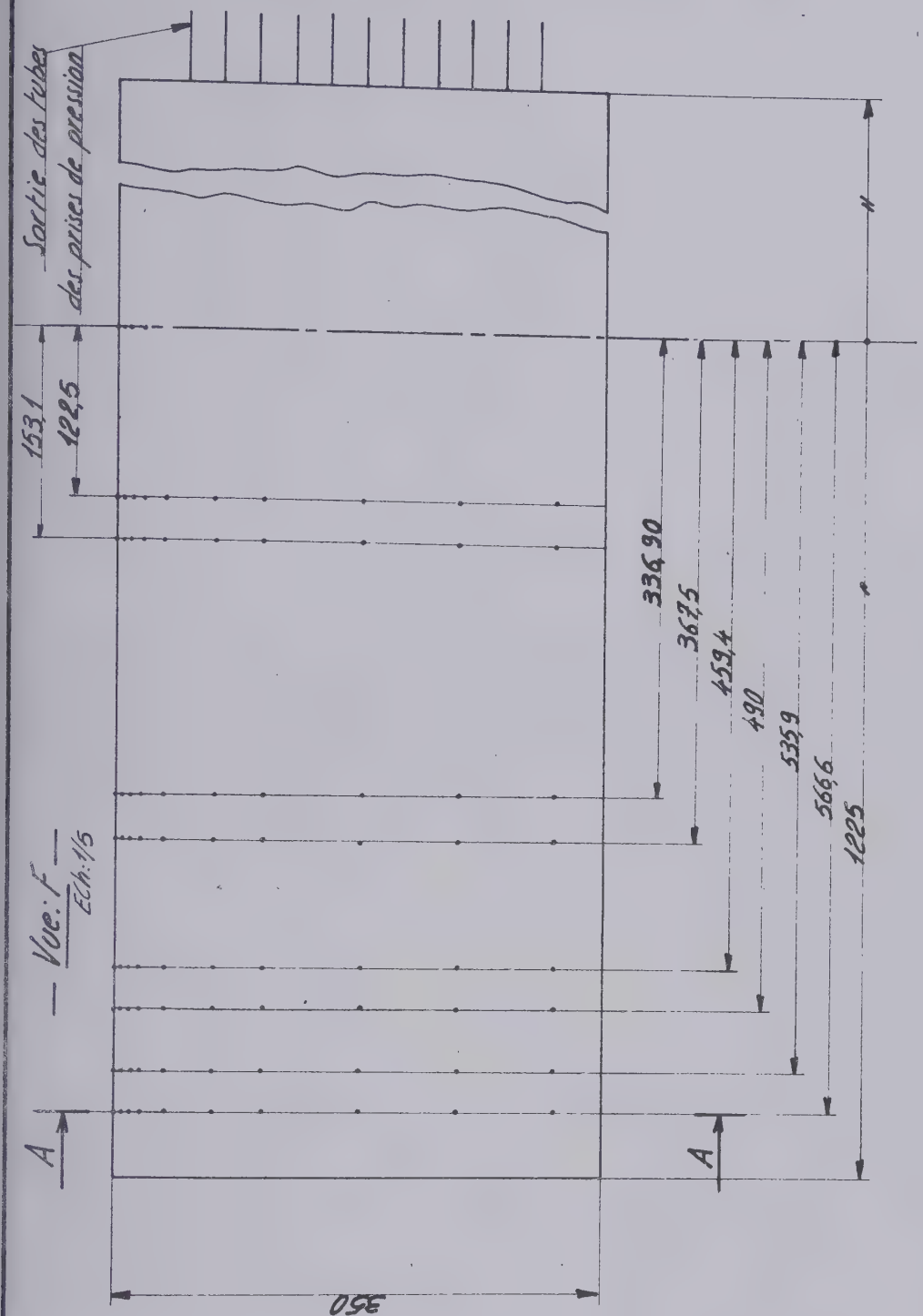
12 ELDER J.W.
Steady flow through non-uniform gauzes
J. Fluid Mech. 5. (1959)

13 TURNER J.T.
A computational method for the flow through non-uniform gauzes
J.Fluid Mech. 36 (1969)

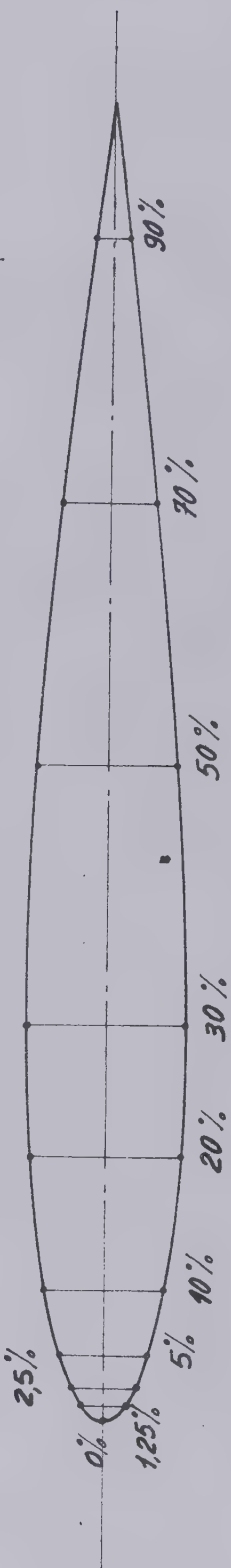
Pl. 1

AILE VRILLEE

MAQUETTE – PRISES DE PRESSION

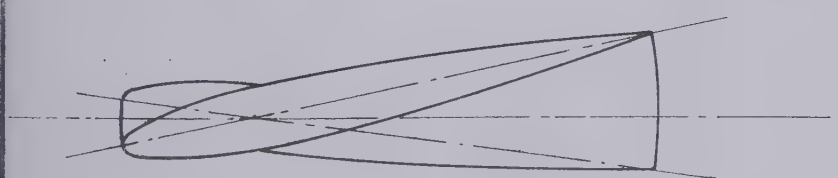


— Vue: F — Ech: 1/5



— Section: A — Ech: 1/2

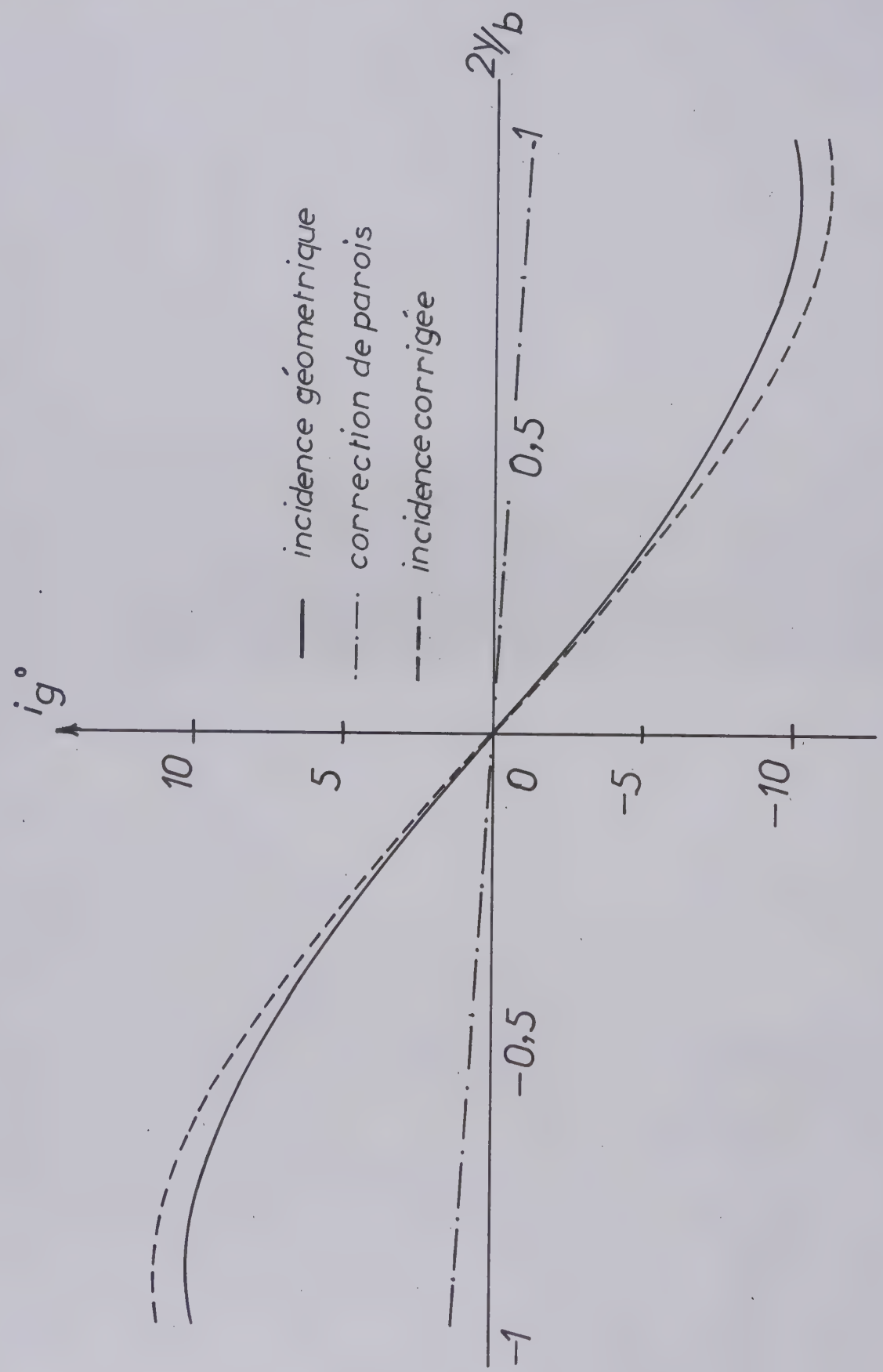
Profil NACA 0012



F

Pl. 4

AILE VRILLEE
REPARTITION D'INCIDENCE

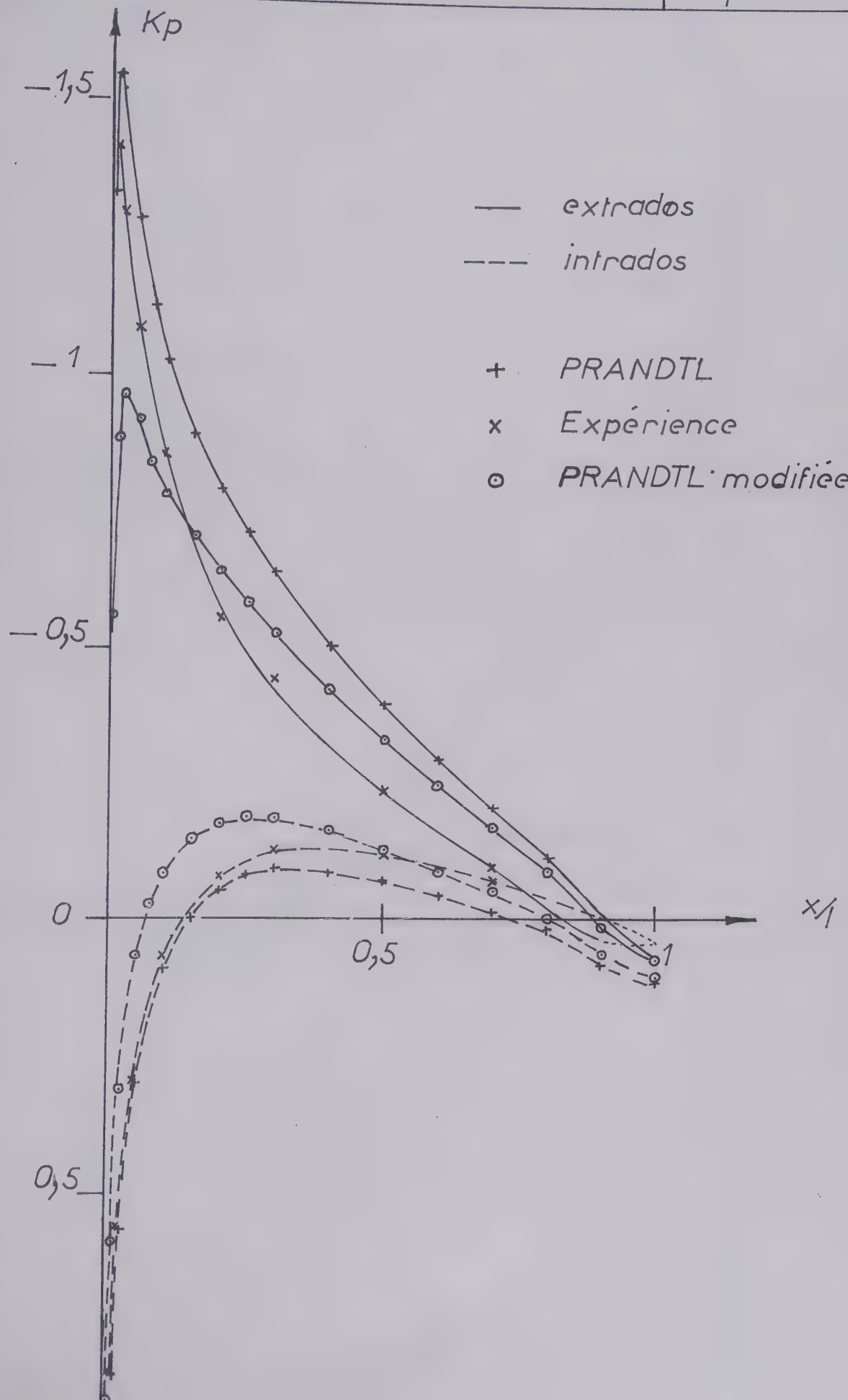


Pl. 5

AILE VRILLEE
REPARTITION DES Kp

$i_o = 0°9'$

$2y/b = -0,8$

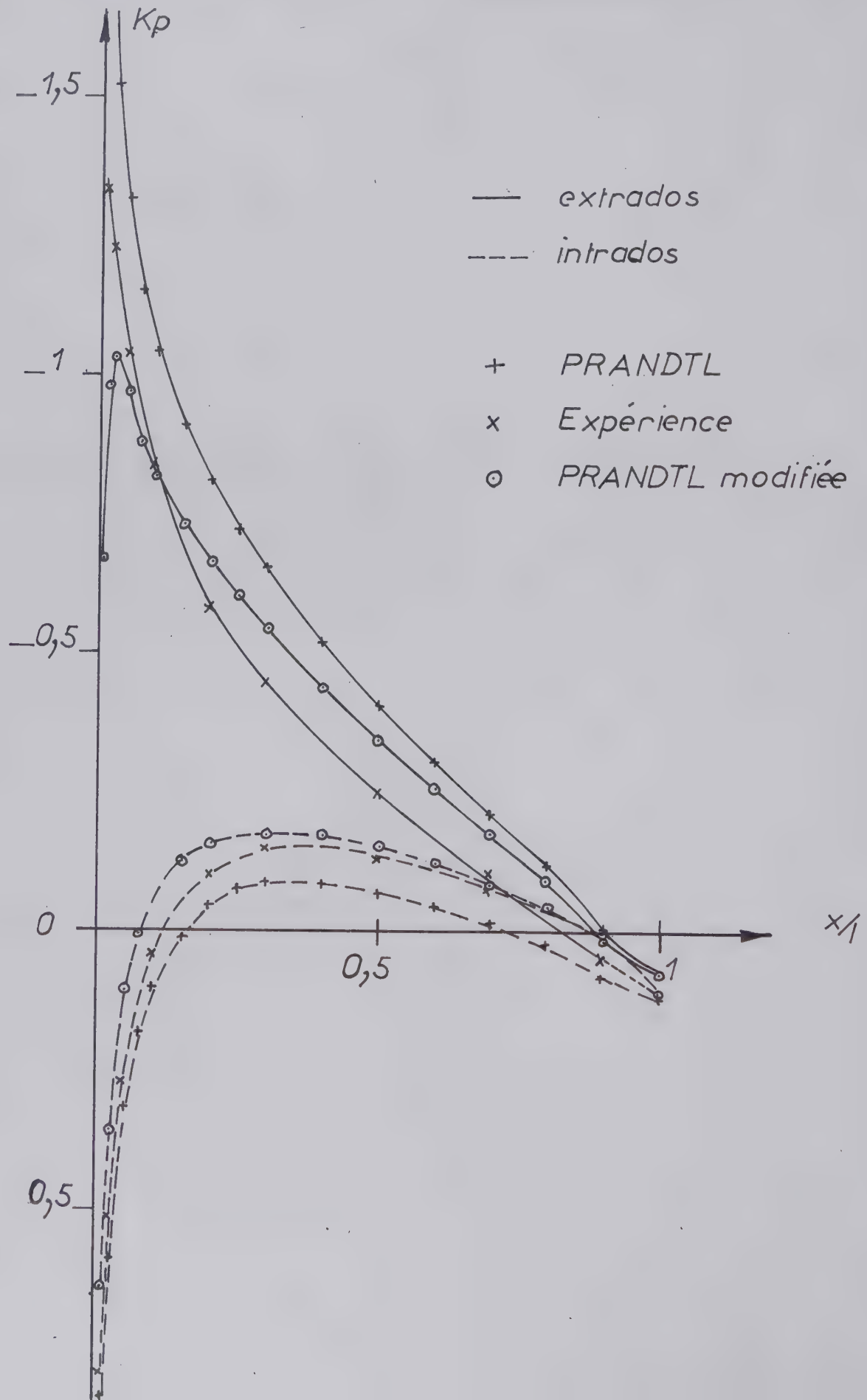


Pl. 6

AILE VRILLEE
REPARTITION DES Kp

$i_0 = 0° 9'$

$2y/b = -0,75$

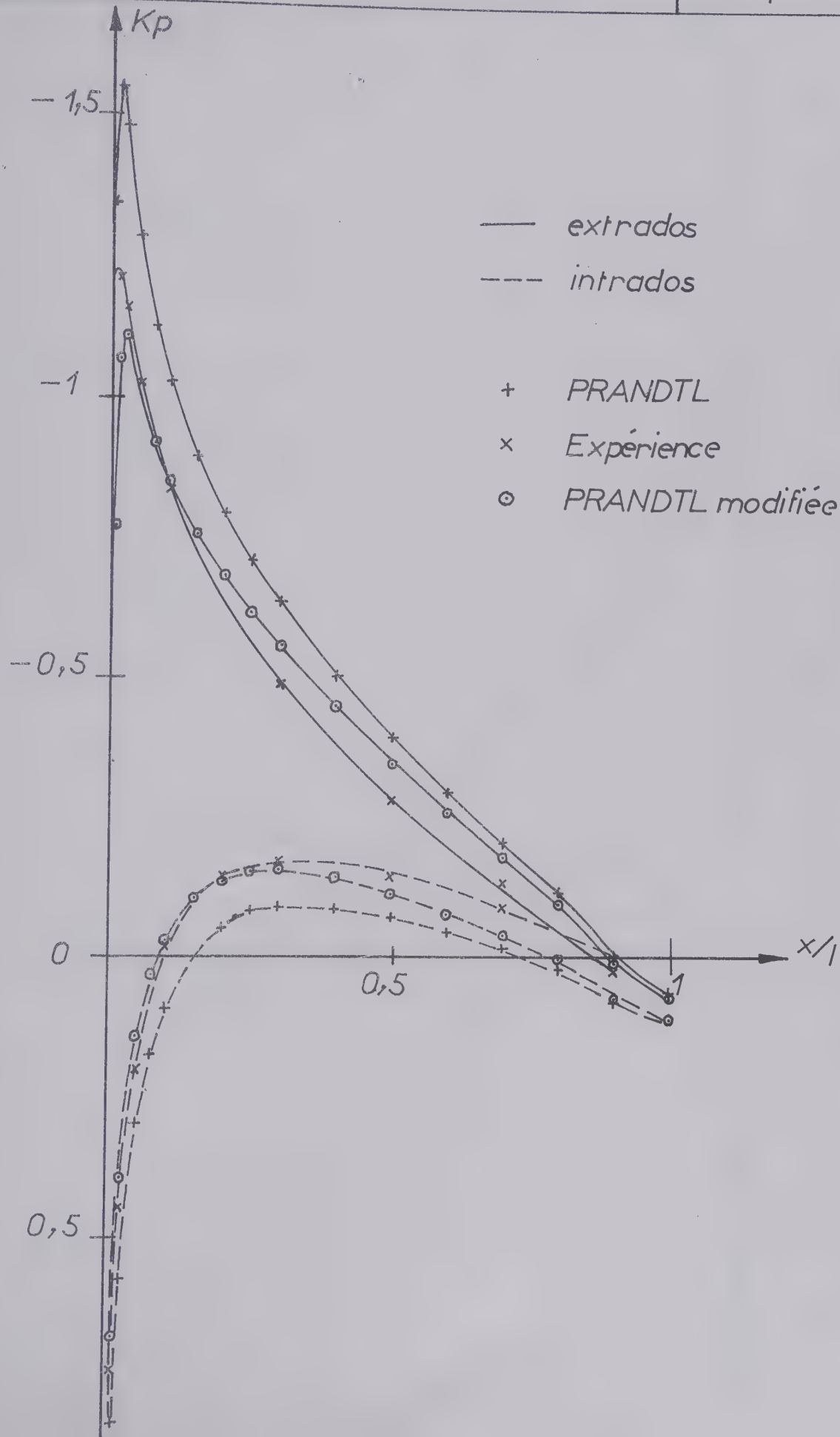


Pl. 7

AILE VRILLEE
REPARTITION DES Kp

$i_o = 0°9'$

$2y/b = -0,6$

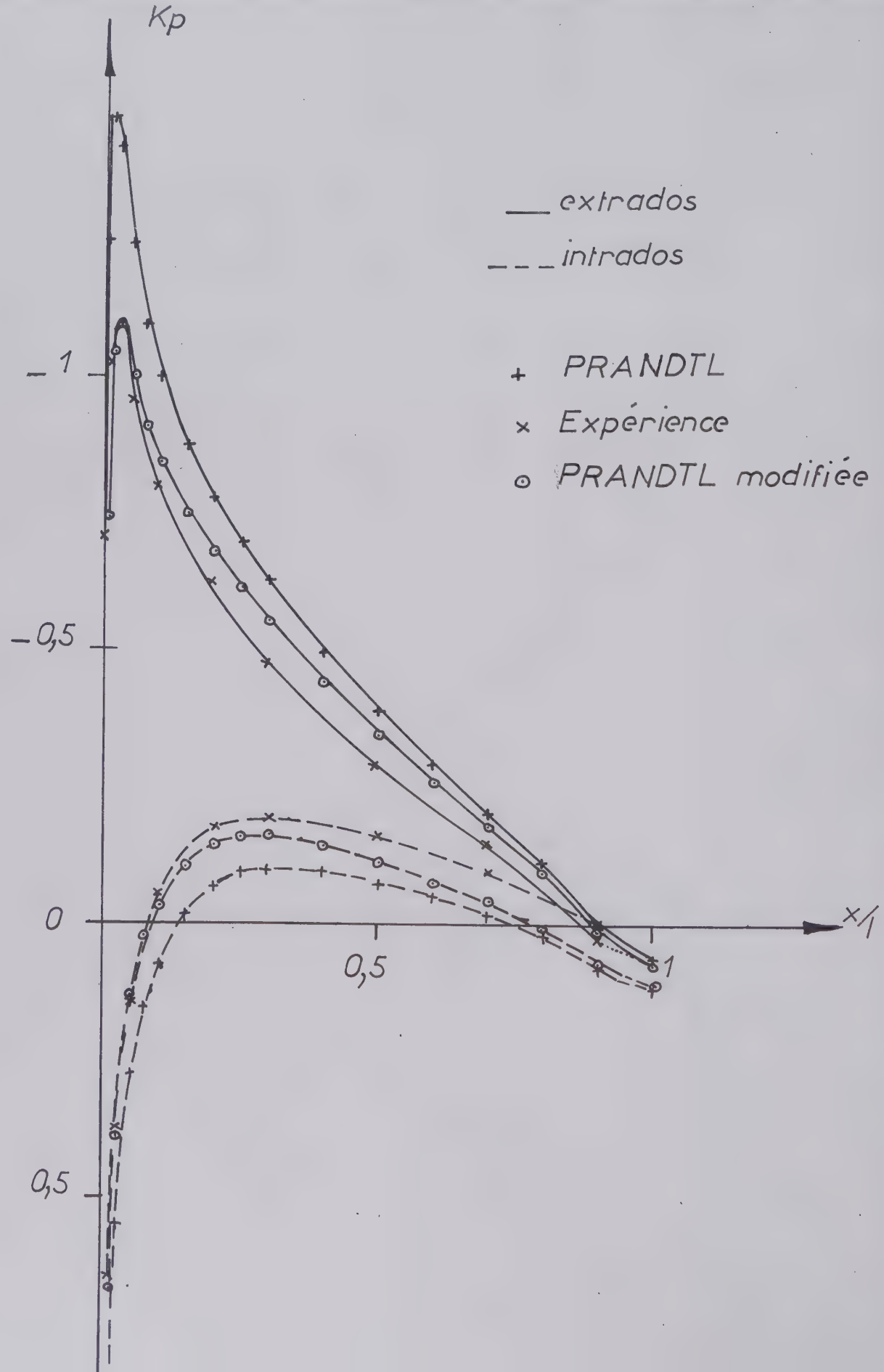


Pl 8

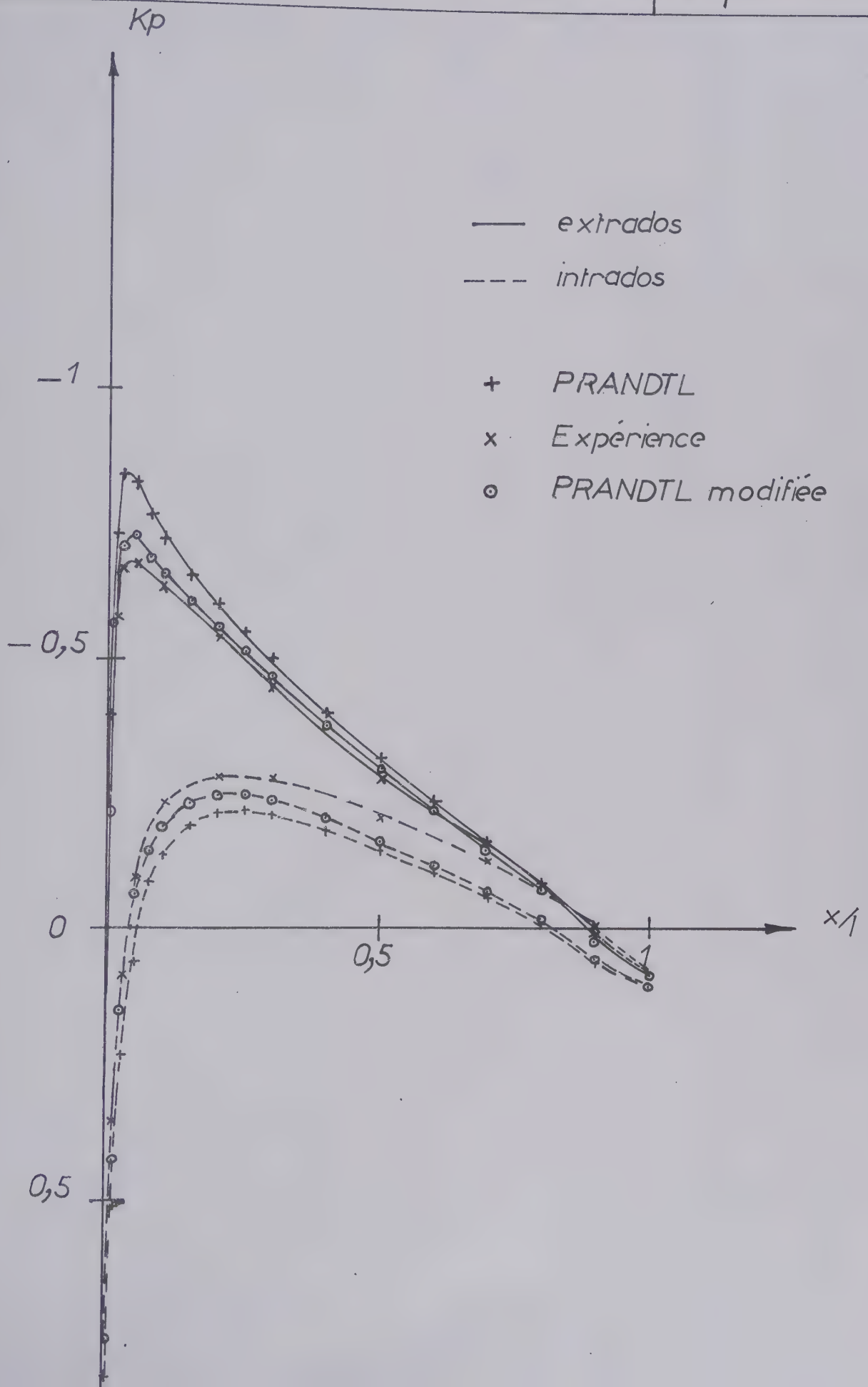
AILE VRILLEE
REPARTITION DES Kp

$i_0 = 0°9'$

$2y/b = -0,55$



Pl 9	AILE VRILLEE REPARTITION DES Kp	$i_o = 0°9'$ $2y/b = -0,25$

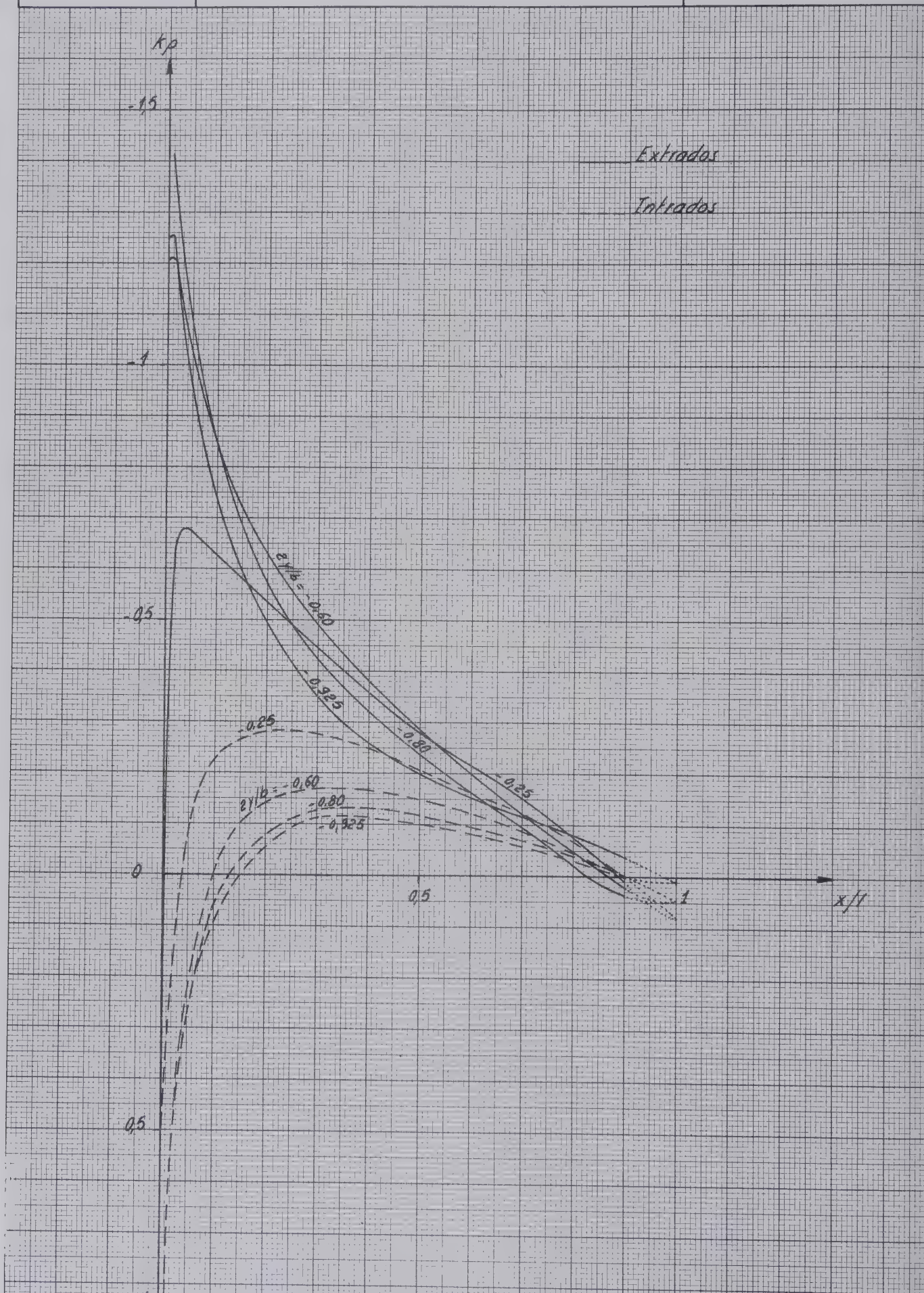


Pl. 10

REPARTITION DES Kp

Aile vrillée - champ de vitesse uniforme

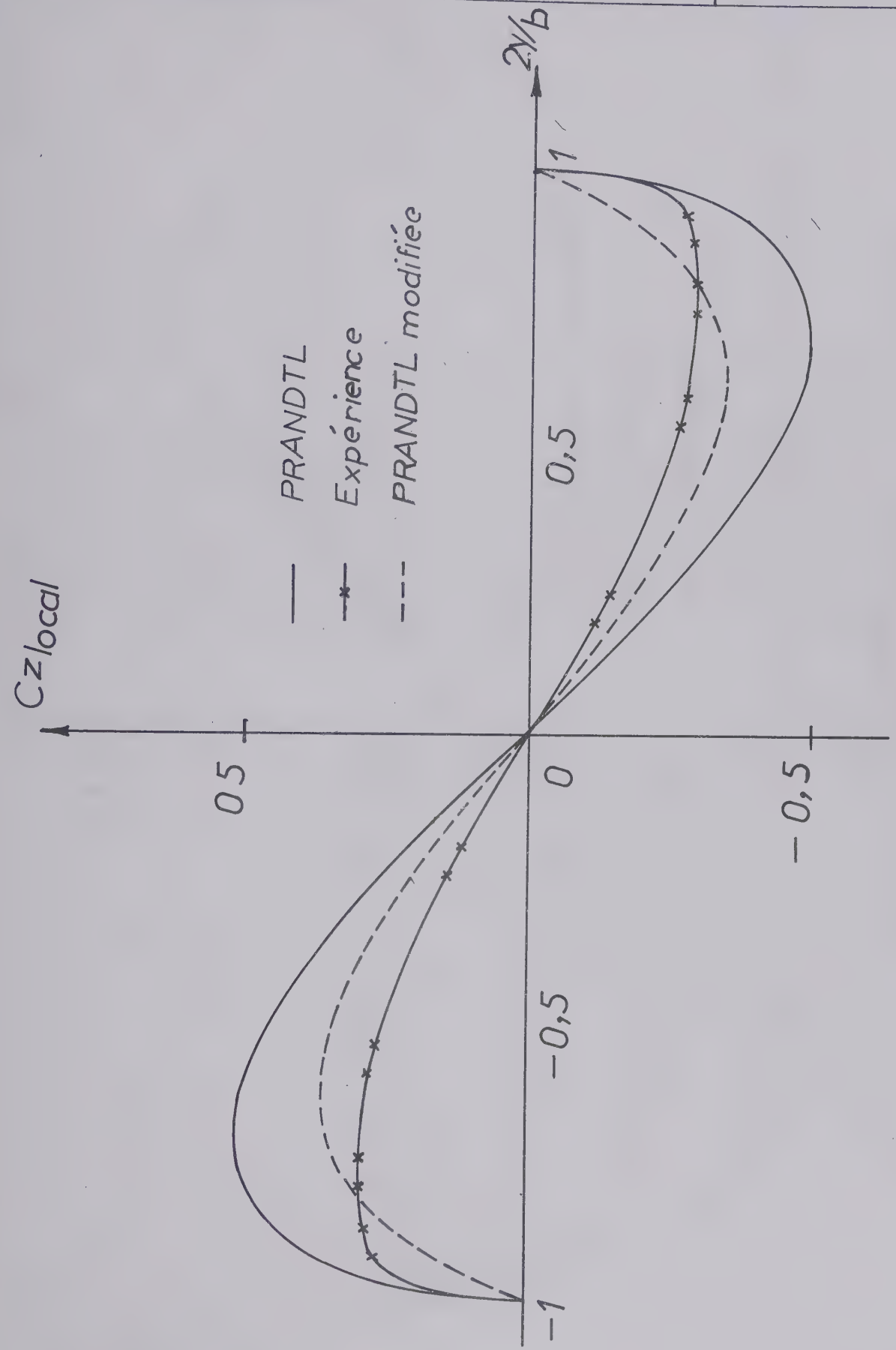
$i_o = 0°9'$



Pl 11

AILE VRILLEE
REPARTITION DE Cz local

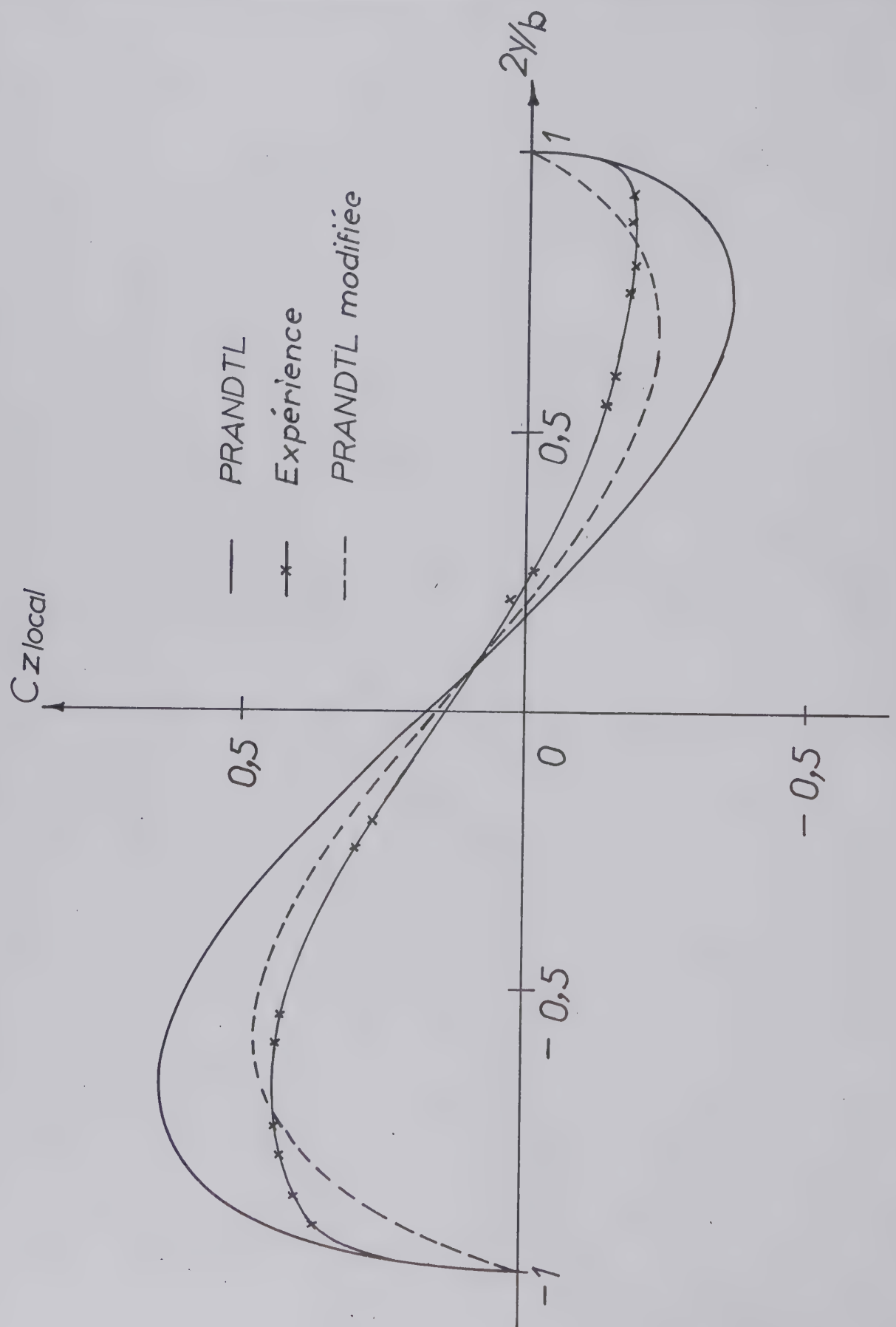
$i_o = 0° 9'$



Pl 12

AILE VRILLEE
REPARTITION DE Cz local

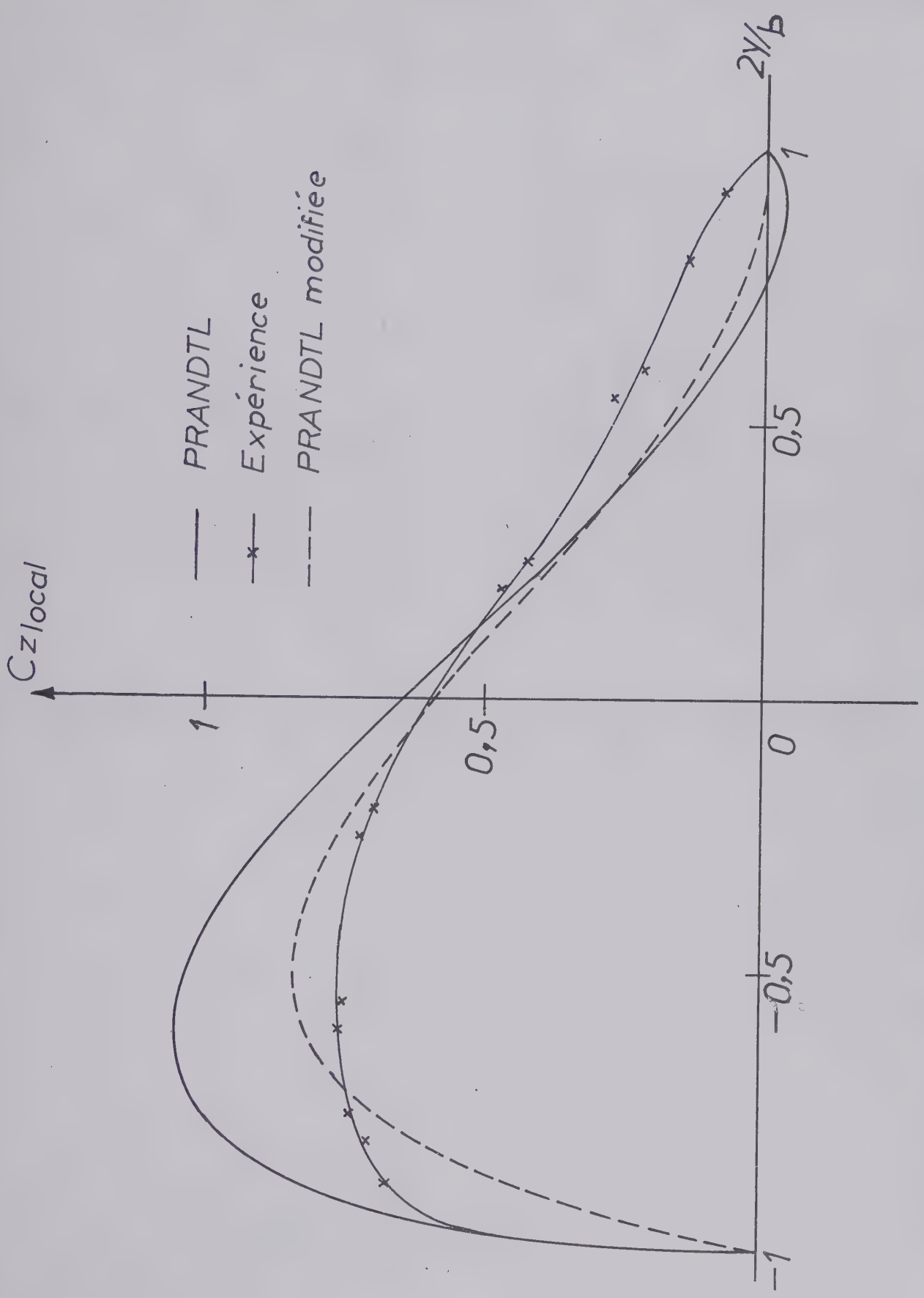
$i_o = 2° 9'$



Pl 13

AILE VRILLEE
REPARTITION DE Cz local

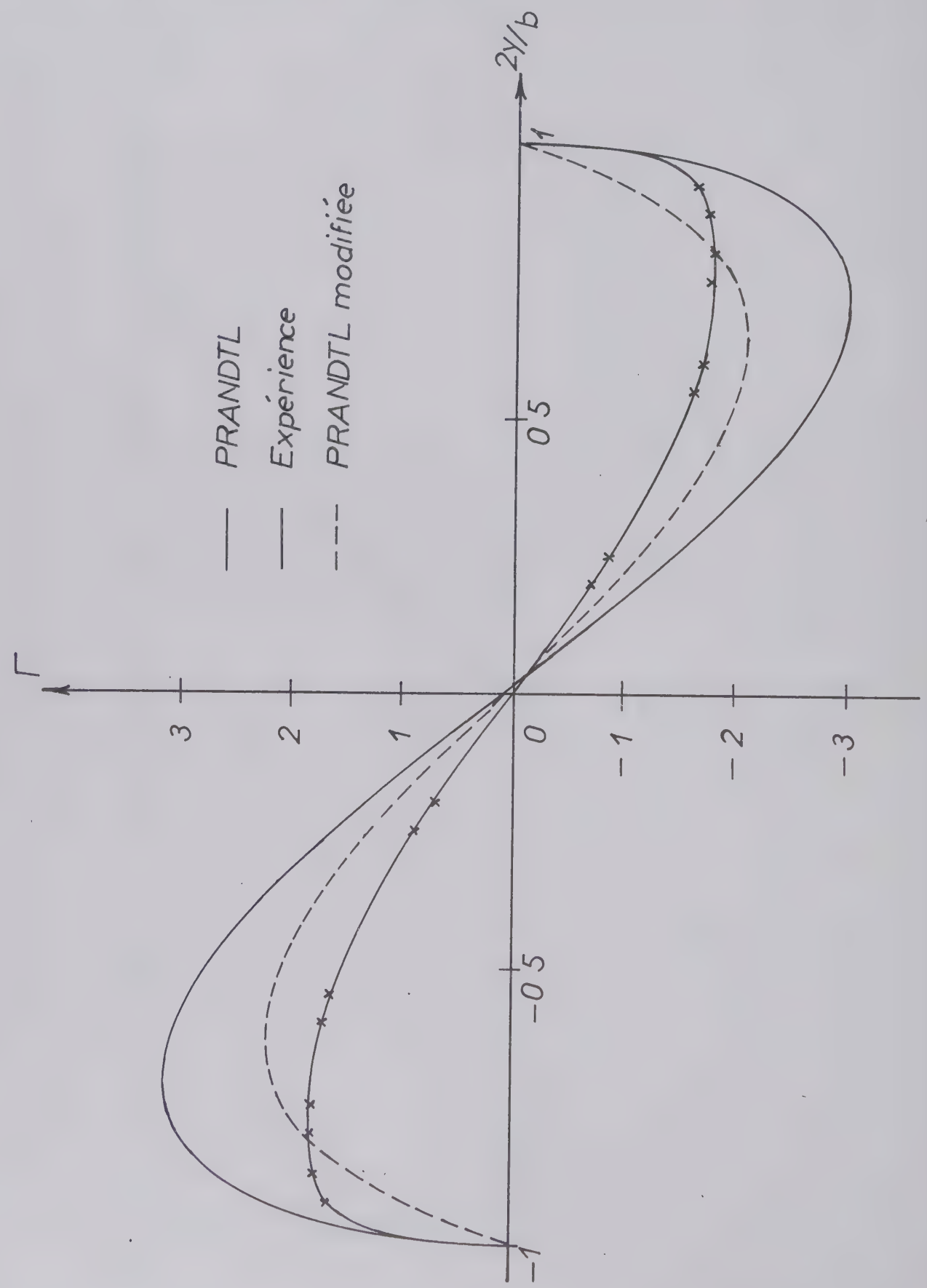
$i_0 = 8°9'$



Pl 14

AILE VRILLEE
REPARTITION DE Cz local

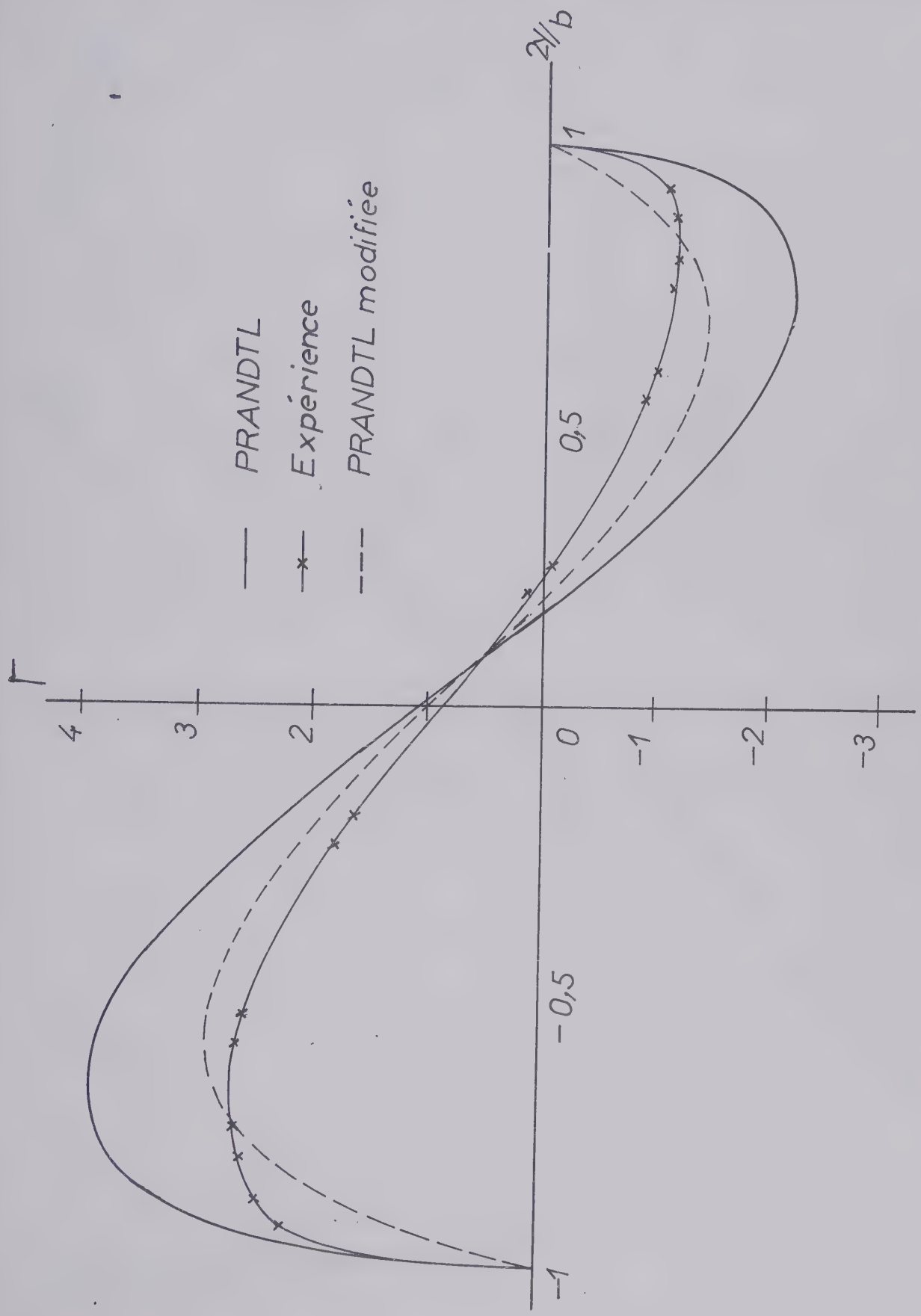
$i_0 = 0° 9'$



Pl. 15

AILE VRILLEE
REPARTITION DE Cz local

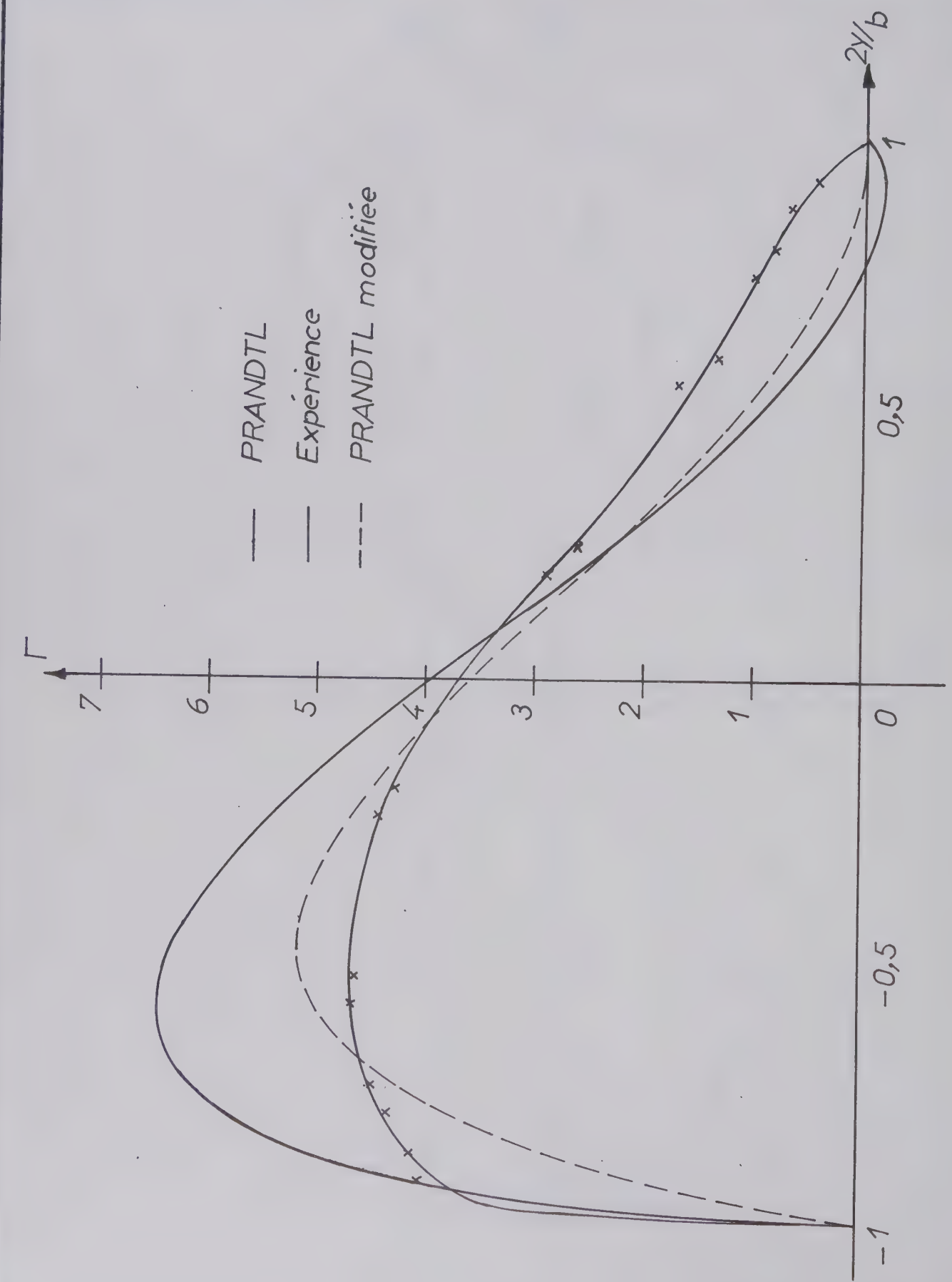
$i_0 = 2° 9'$



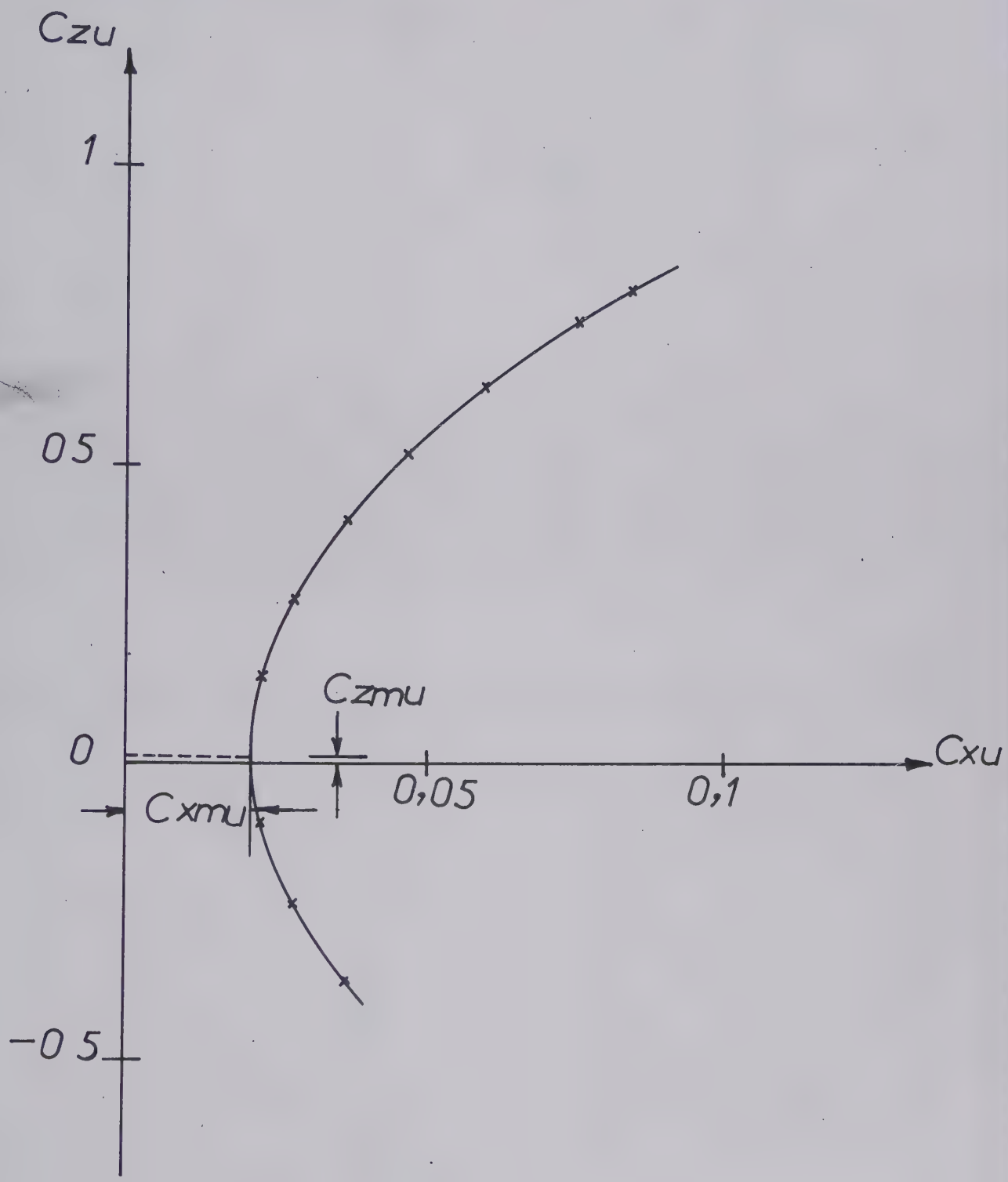
Pl. 16

AILE VRILLEE
REPARTITION DE Cz local

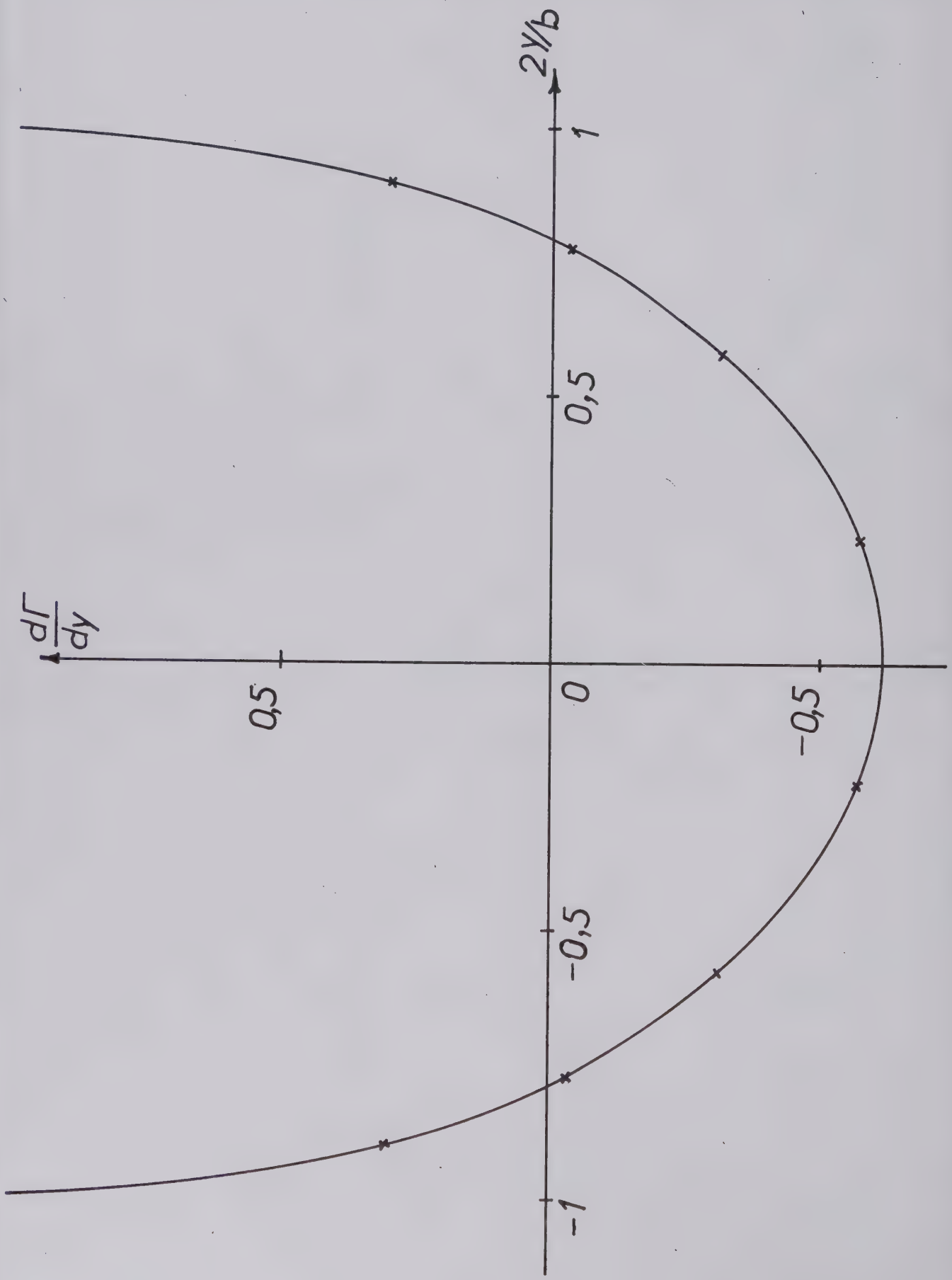
$i_0 = 3°9'$



Pl 17	AILE VRILLEE POLAIRE EXPERIMENTALE	



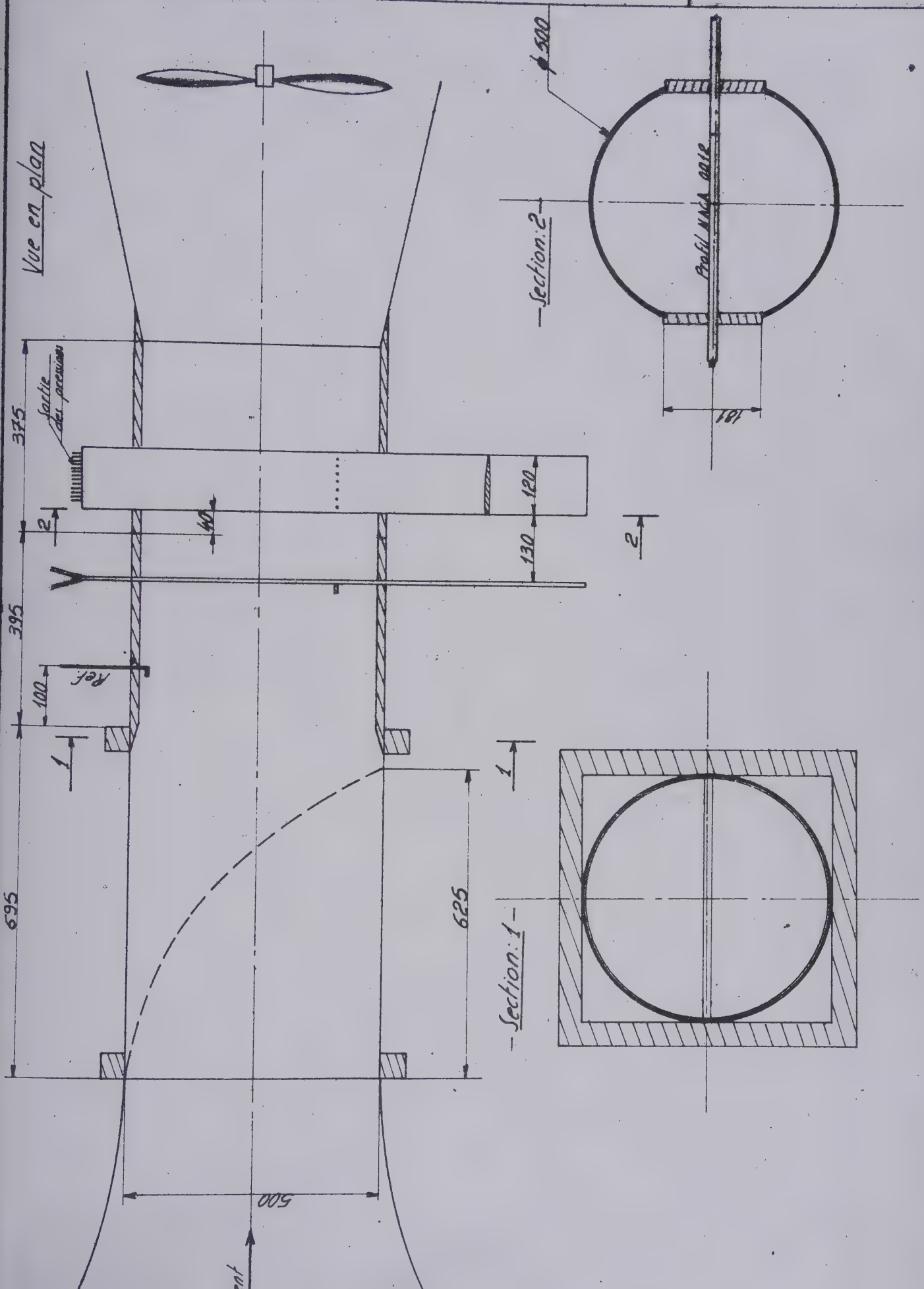
Pl 18	AILE VRILLEE REPARTITION DE $d\Gamma/dy$	$l_o = 0$



Pl. 19

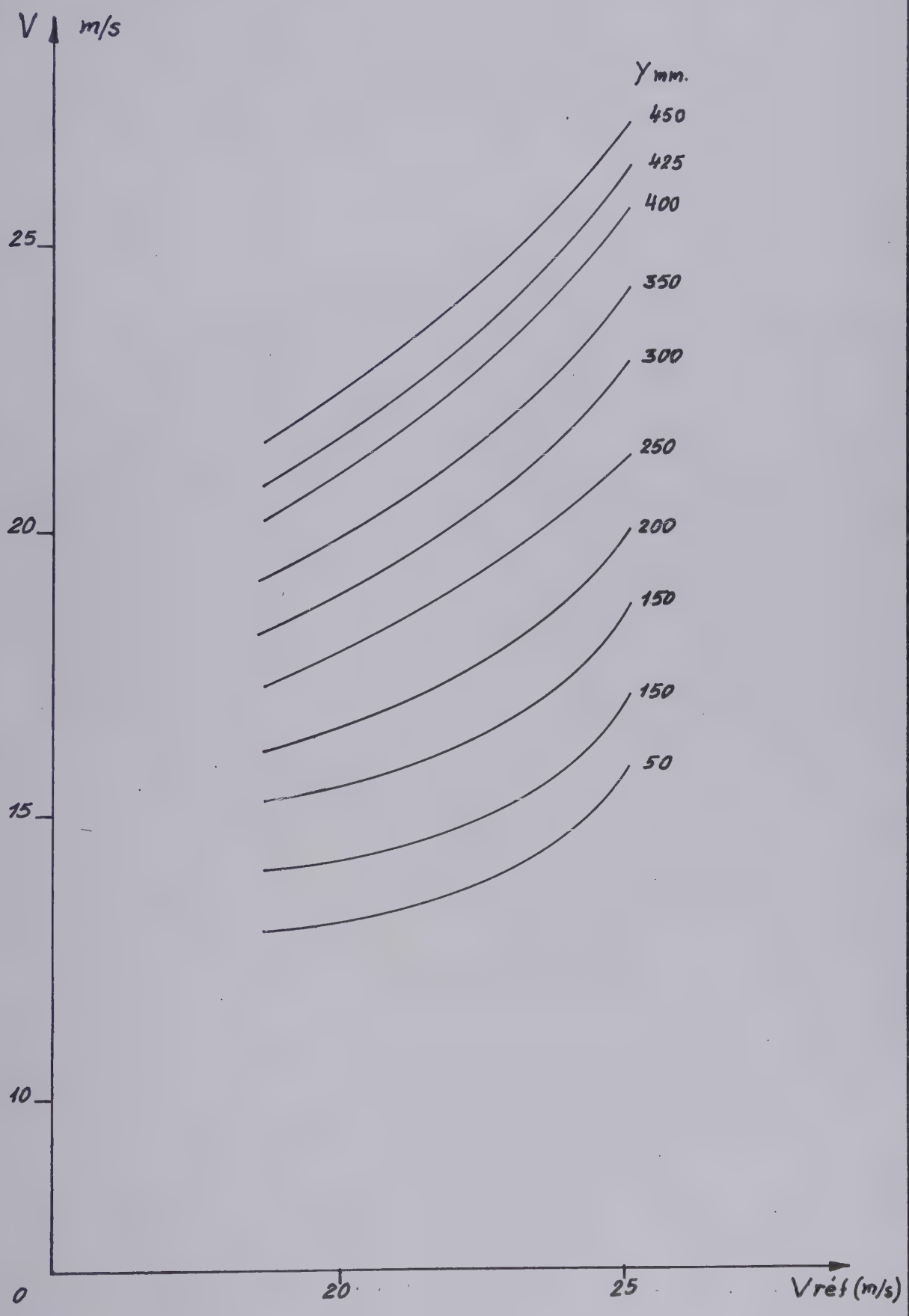
MONTAGE D'ESSAI

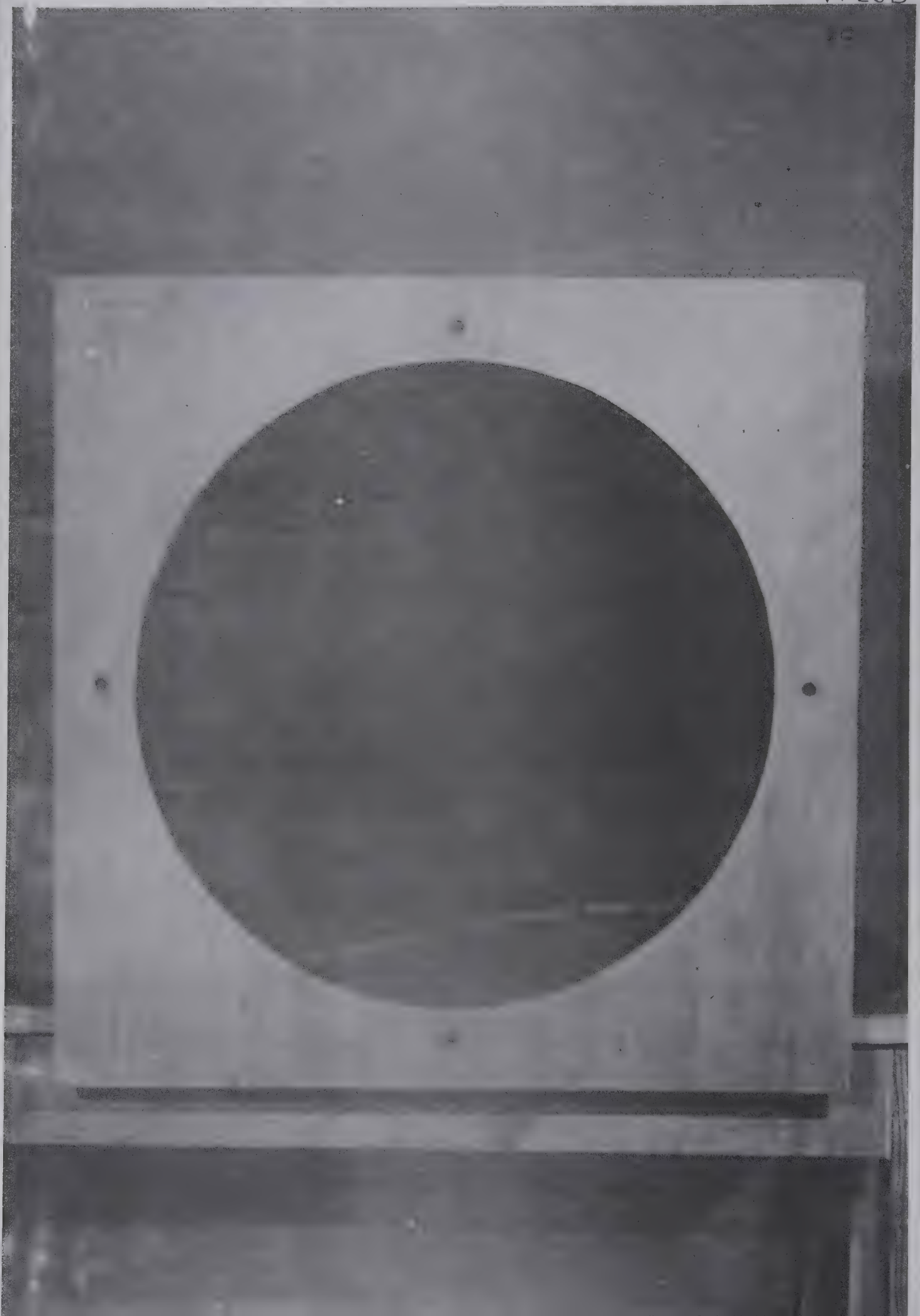
Aile plate - champ de vitesse linéaire



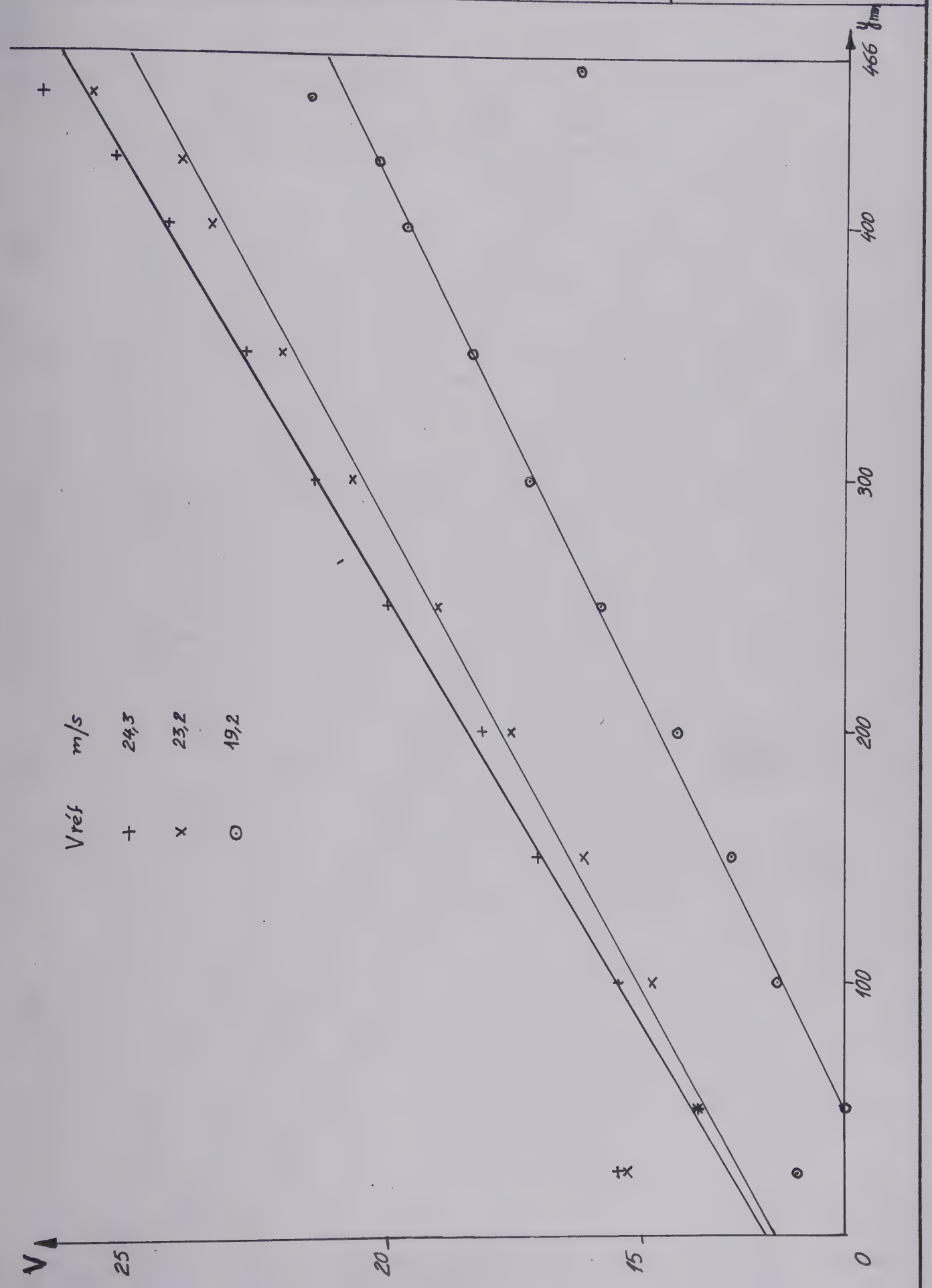
Pl. 21

Variation de la vitesse locale avec la vitesse de référence en différentes stations y





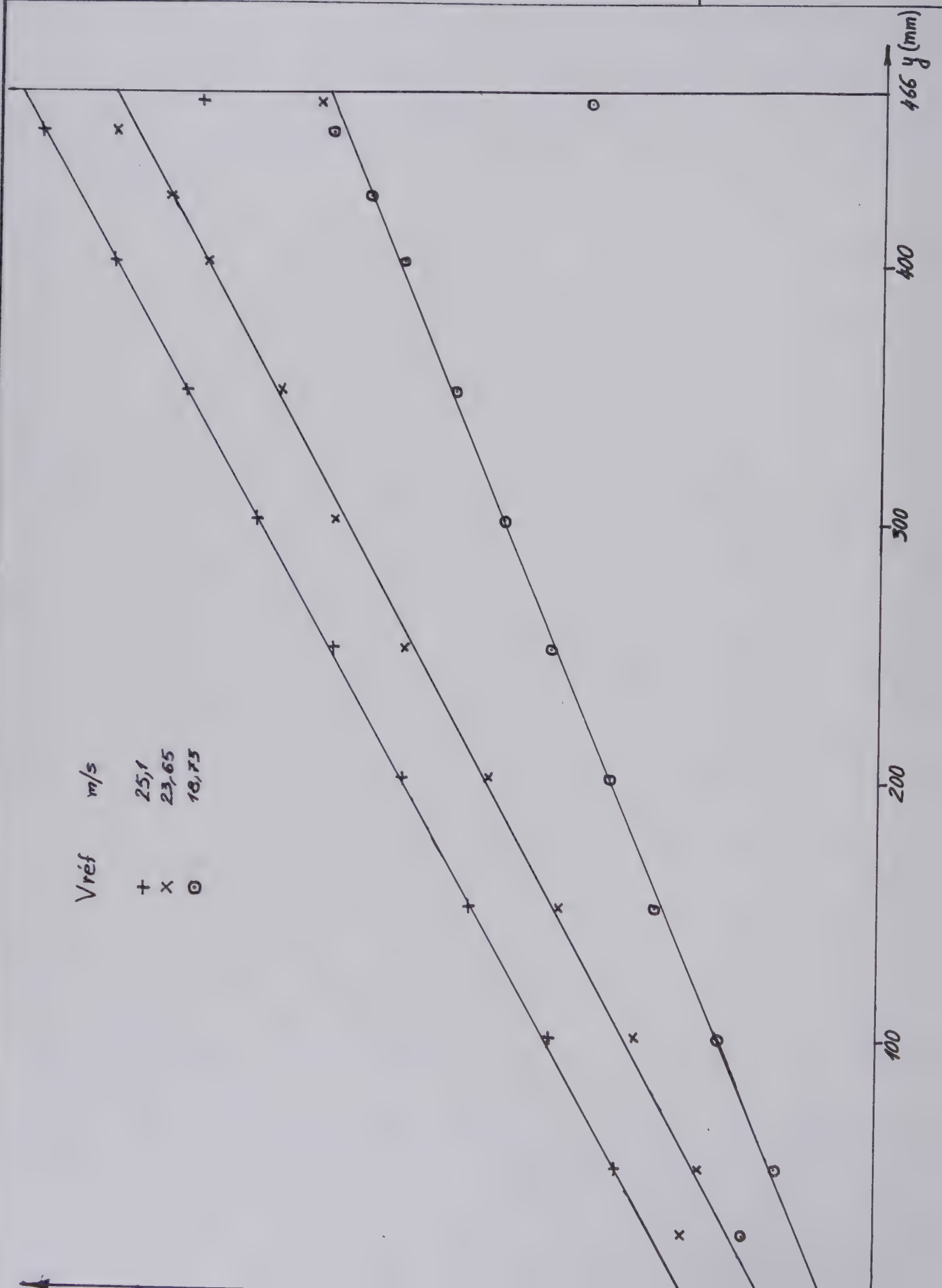
Pl.22	Champ de vitesse en présence de maquette	$lg = 4°$



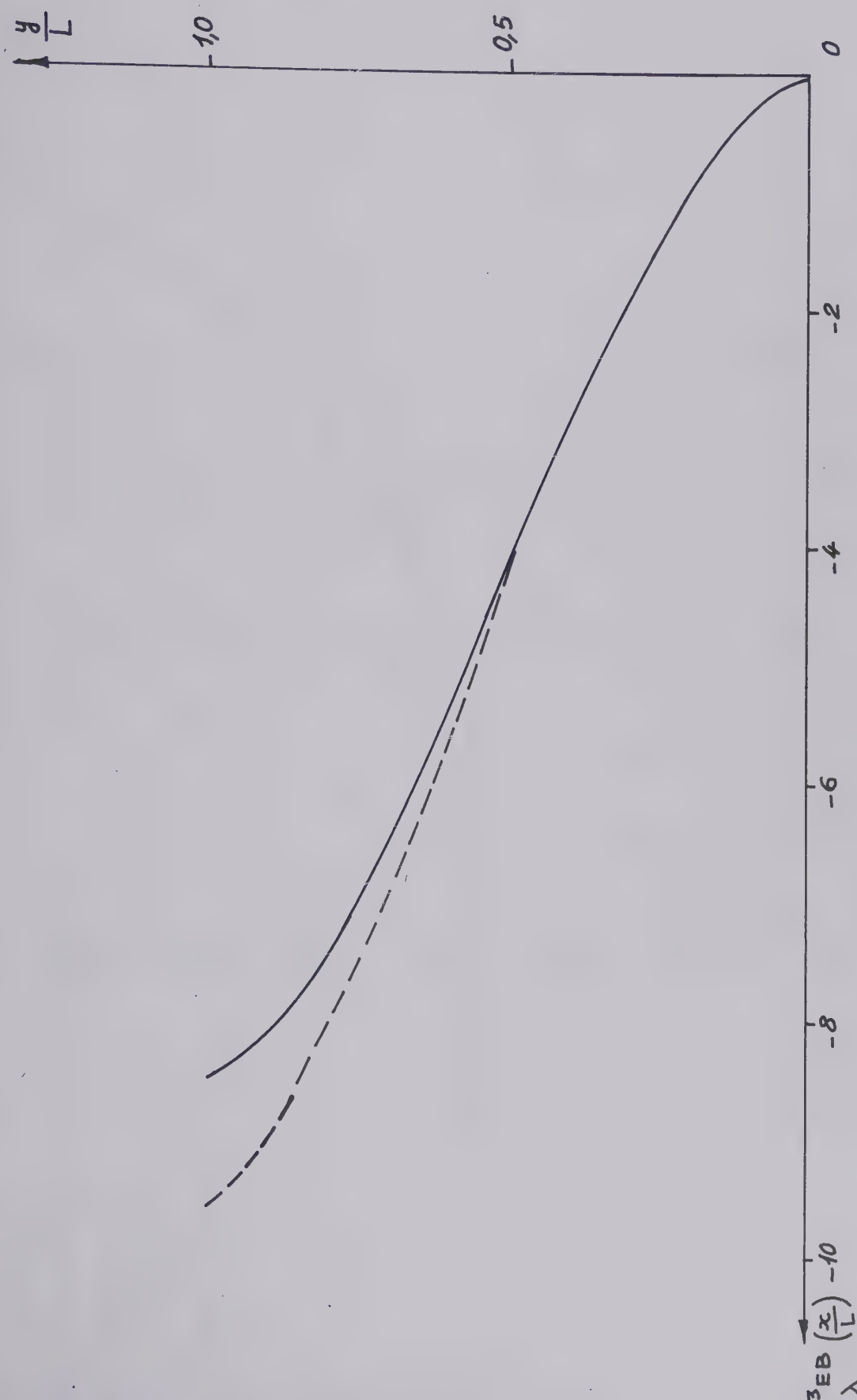
Pl 23

Champ de vitesse obtenu
en présence de la maquette

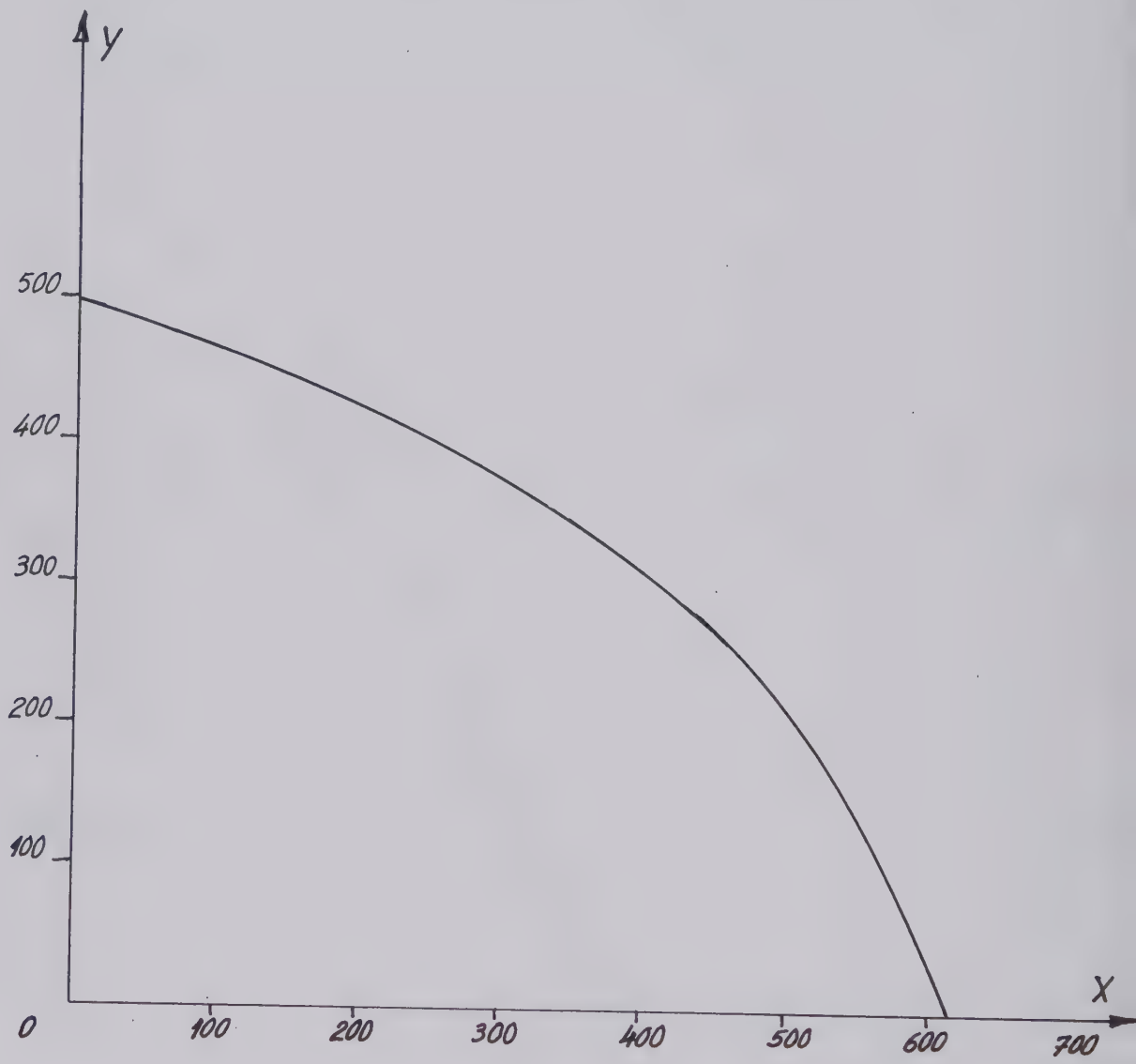
$\lg = 0°$

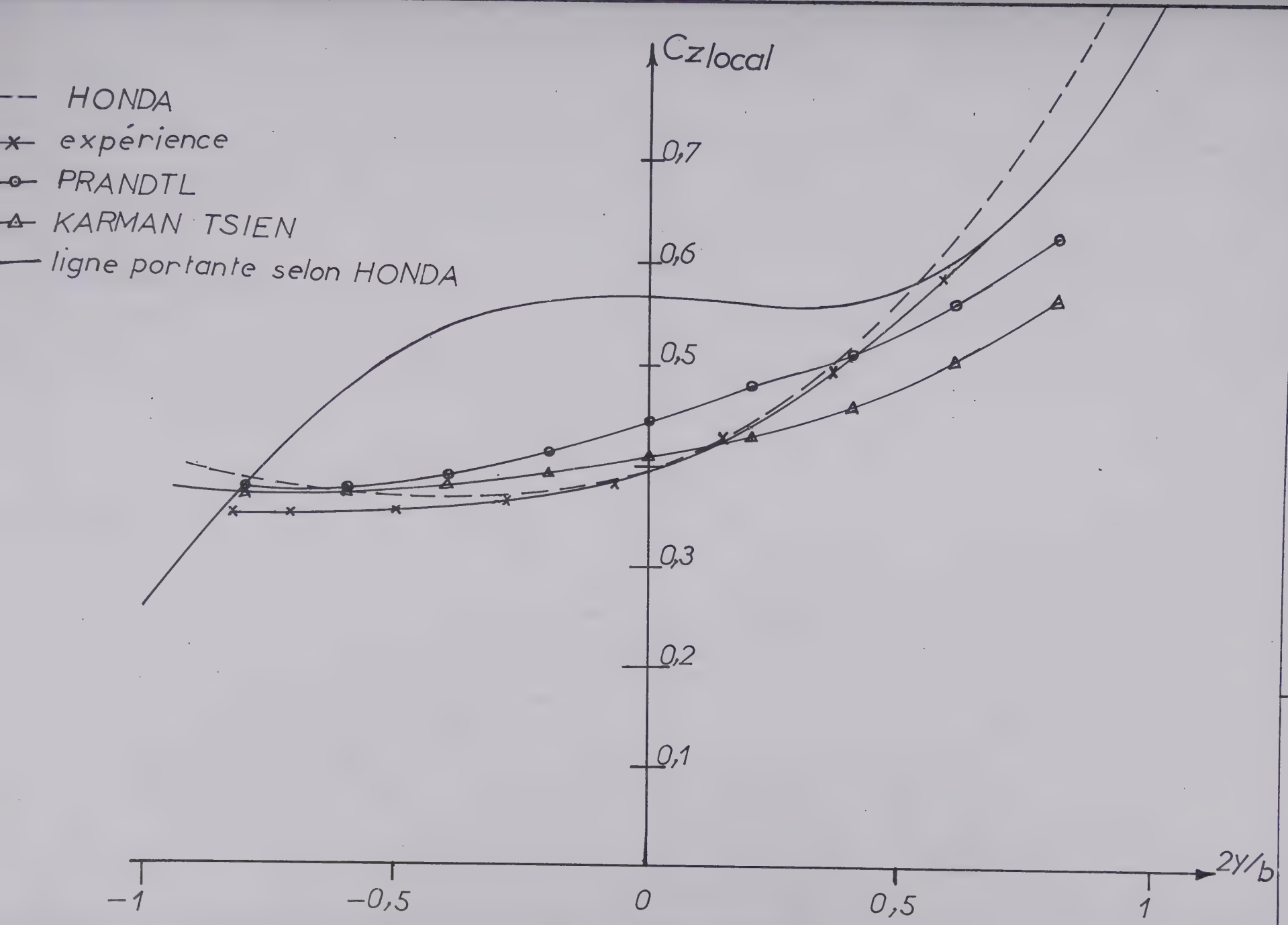


Pl 24	Forme de grillage non dimensionnelle pour obtenir un champ de vitesse linéaire	



Pl. 25	Forme de grillage pour un champ de vitesse linéaire dans la soufflerie	





Pl. 26

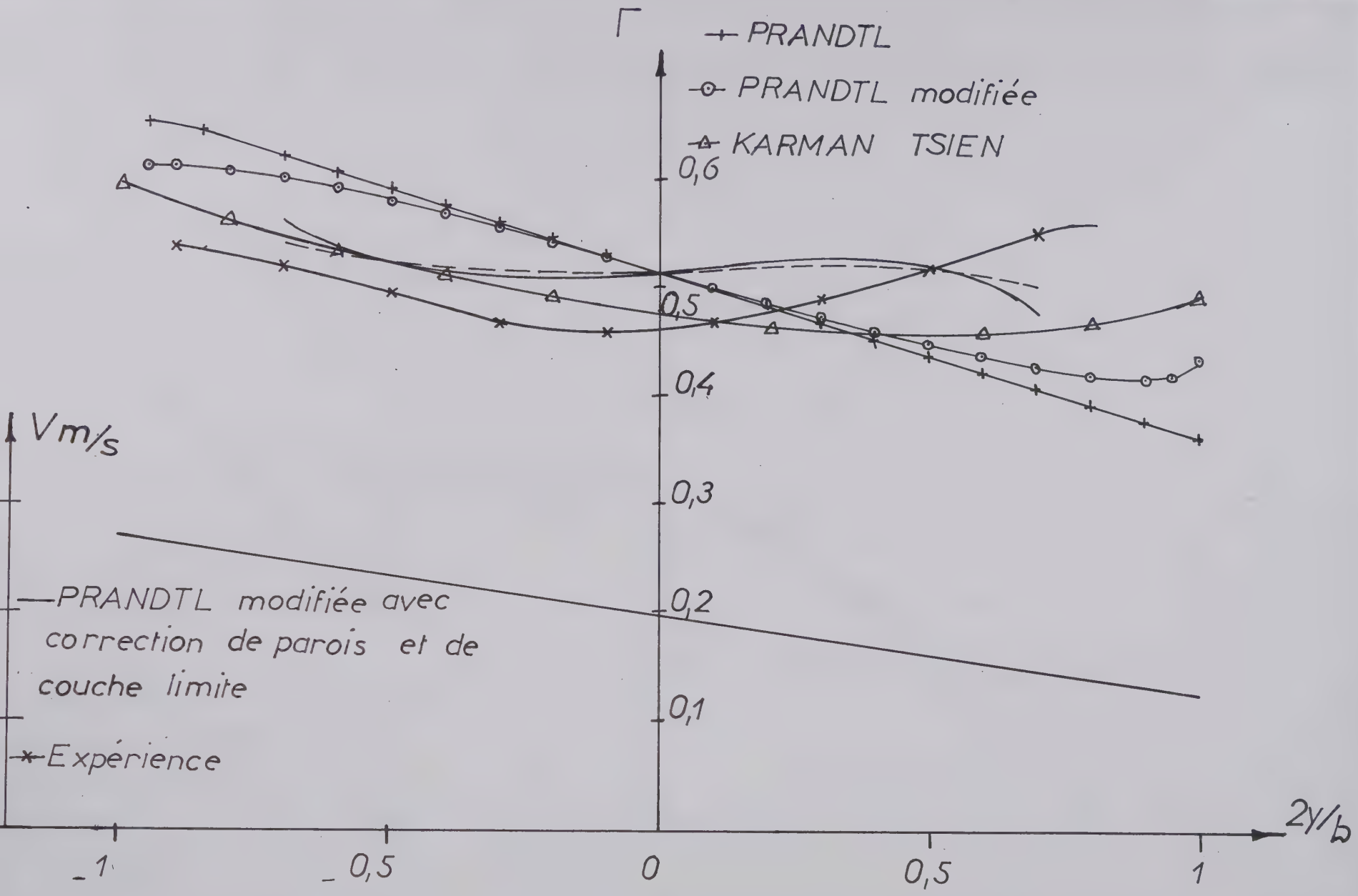
aile plate - champ de vitesse linéaire
répartition de Cz local

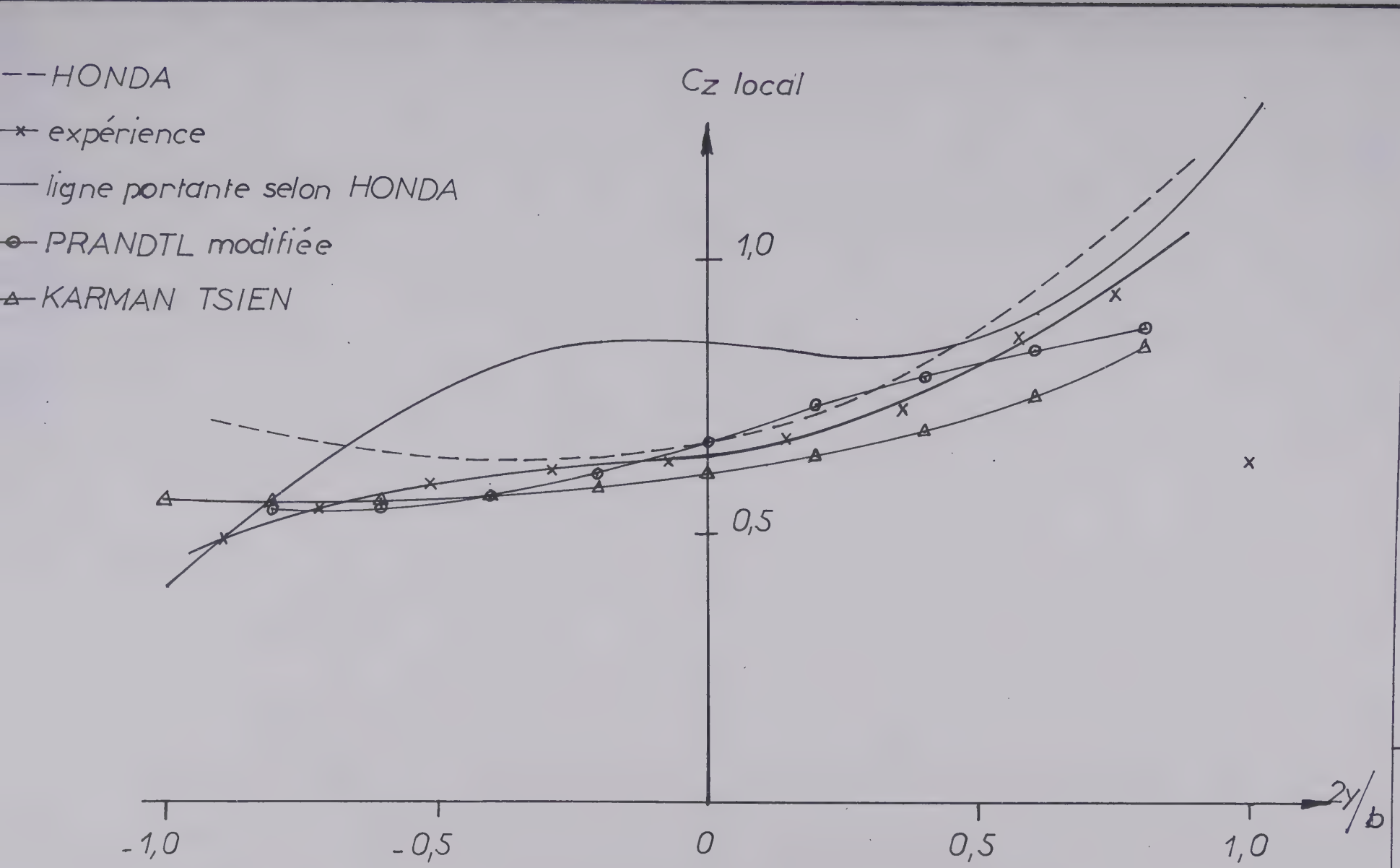
$l_g = 4°$

Pl. 27

aile plate - champ de vitesse linéaire
répartition de circulation

$lg = 4°$

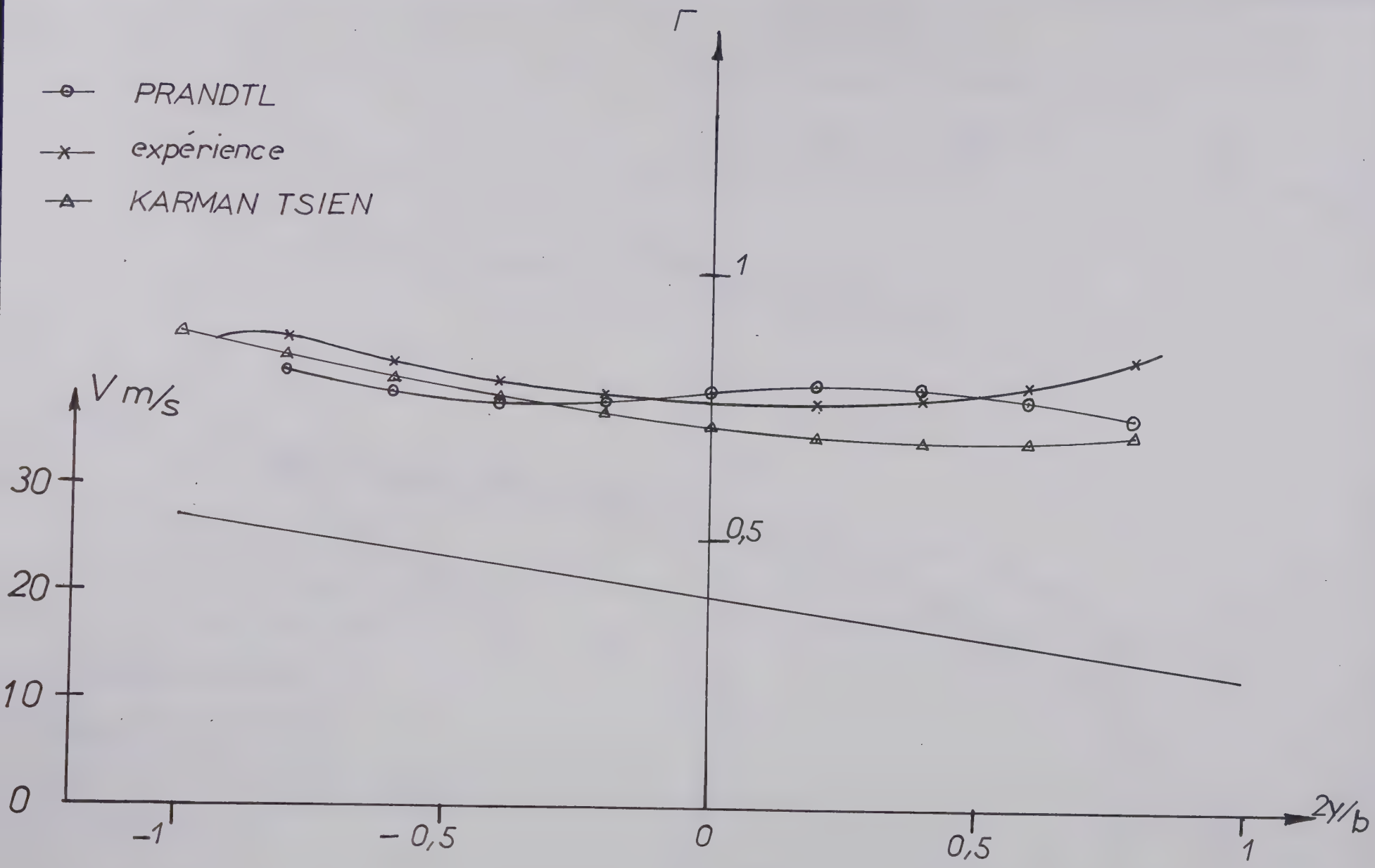




Pl. 263

aile plate - champ de vitesse linéaire
répartition de Cz local

lg = 6°



Pl. 29

aile plate _ champ de vitesse linéaire
répartition de circulation

lg = 6°

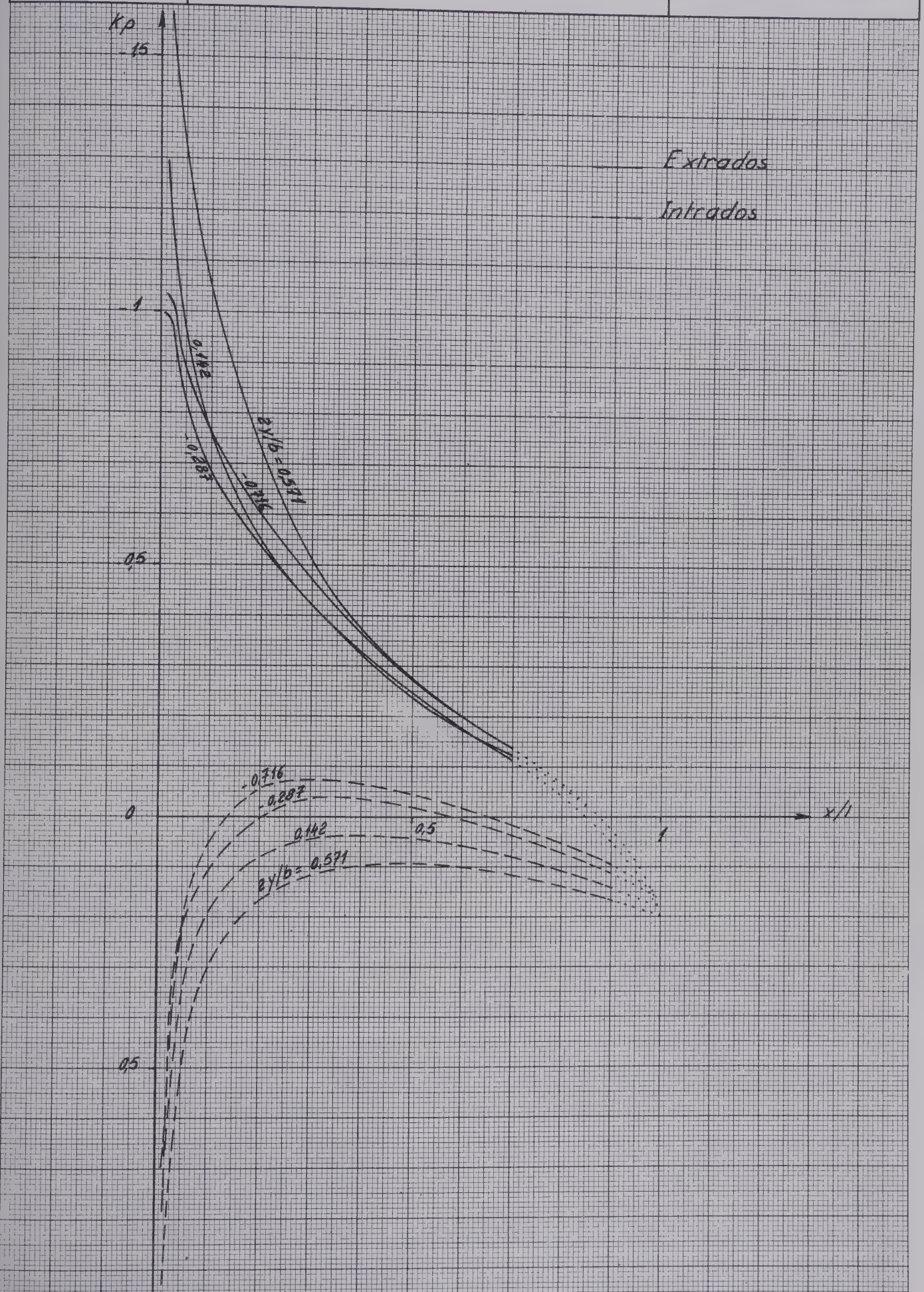
Pl. 30

REPARTITION DES Kp

Aile plate - champ de vitesse linéaire

$l = 4°$

expérimentale



ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . . . . .

THESE DE : . . DOCTEUR - INGENIEUR . . . . . .

NOM : . . Monsieur . GUPTA . . . . . .

Prénoms : . . . Pawan . . . . . .

né le 29 Décembre 1944 à Bhatinoa . . . . . ~~Départ~~ t . . Inde

1ère THESE : . . . . " Etude théorique et expérimentale du modèle de prandtl . . pour des écoulements non-uniformes (incidence ou vitesse variable en . . . envergure)." . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

PRESIDENT.M.MALAVARD . . . . . .

EXAMINATEURS.MM.COMOLET

BERNARD

Vu et Approuvé

PARIS, le . . . 5 Juillet 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI

ACADÉMIE DE PARIS
UNIVERSITÉ PARIS VI